Problema 1. Fie M un punct în interiorul paralelogramului $ABCD$.
Arătaţi că $\sphericalangle MDA \equiv \sphericalangle MBA$ dacă şi numai dacă $\sphericalangle MAD \equiv \sphericalangle MCD$.

* * *

<u>*Soluţia* 1:</u>

O soluţie scurtă şi elegantă se bazează pe următoarea construcţie:
Considerăm punctul P astfel ca $ADMP$ să fie paralelogram. Având laturile (opuse) MP şi BC paralele şi congruente, $PMBC$ este şi el paralelogram. Atunci $\sphericalangle MDA \equiv \sphericalangle MBA \iff \sphericalangle MPA \equiv \sphericalangle MBA \iff AMBP$ este inscriptibil $\iff \sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MCB \iff \sphericalangle MAD \equiv \sphericalangle MCD$.

Observaţii: **1.** O problemă foarte asemănătoare s-a dat anul trecut la etapa finală a concursului Gazeta Matematică - viitoriolimpici.ro (problema 1 de la clasa a IX-a), vezi Gazeta Matematică seria B, nr. 11/2010.
2. Vă mai semnalăm o problemă care se poate rezolva uşor cu ajutorul construcţiei de mai sus:
Fie M un punct în interiorul paralelogramului $ABCD$. Arătaţi că

$$MA \cdot MC + MB \cdot MD \geq \mathscr{A}_{ABCD}.$$

Tot pe această temă vă propunem şi problema **E.82.** din RMT nr. 2/2011.

<u>*Soluţia* 2:</u> (dată de Ştefan Vrânceanu)

Fie P, Q, R, S proiecţiile punctului M pe dreptele AB, BC, CD, respectiv DA. Se formează patrulaterele inscriptibile (posibil degenerate dacă una din proiecţii cade într-unul din vârfurile paralelogramului) $MRDS$ şi $MPBQ$ (ordinea punctelor poate să nu fie asta). Avem $\sphericalangle MRS \equiv \sphericalangle MDA \equiv \sphericalangle MBA \equiv \sphericalangle MQP$, de unde rezultă că patrulaterul $PQRS$ este inscriptibil.
Analog se demonstrează echivalenţa $\sphericalangle MAD \equiv \sphericalangle MCD \iff$ patrulaterul $PQRS$ este inscriptibil, de unde concluzia.

<u>*Soluţia* 3:</u> (schiţă)

Vom demonstra numai prima implicaţie, cea de-a doua fiind similară.
Dacă $M \in BD$ atunci $ABCD$ este romb şi afirmaţia este imediată.
În continuare vom presupune că $M \in Int\,(\Delta ABC)$. În celălalt caz figura este diferită dar afirmaţiile de mai jos rămân adevărate (argumentele se modifică puţin).
Se consideră $\{P\} = AD \cap BM$ şi $\{Q\} = AB \cap DM$. Se arată succesiv că:
- patrulaterul $BDPQ$ este inscriptibil;
- $\Delta\, APQ \sim \Delta\, ABD$ (UU);
- $\Delta\, MPQ \sim \Delta\, MDB$ (UU);
- $\Delta\, MPA \sim \Delta\, MDC$ (scriind rapoartele egale din asemănările de mai sus);
- $\sphericalangle MAP \equiv \sphericalangle MCD$.

Am mai primit şi alte soluţii foarte bune bazate pe asemănare.
De asemenea, am primit şi soluţii cu teorema sinusurilor (vezi şi remarca din GM nr. 11/2010 privitoare la rezolvarea problemei date la concursul GM-viitoriolimpici.ro).

Problema 2. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există un pătrat perfect în a cărui scriere zecimală cifra 1 apare de exact n ori.

* * *

<u>*Soluţia*</u> 1:

Vom arăta că $a = \overline{\underbrace{1111...1}_{n \text{ cifre}}\underbrace{222...2}_{n+1 \text{ cifre}}5}$ este pătrat perfect pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Pentru $n = 0$ acest lucru este evident.
Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notăm $x = \overline{\underbrace{1111...1}_{n \text{ cifre}}}$. Atunci, folosind că $9x + 1 = 10^n$, avem

$a = x \cdot 10^{n+2} + 200x + 25 = 100x(9x+1) + 200x + 25 = 900x^2 + 300x + 25 = (30x+5)^2$
adică un pătrat perfect.
(Altfel, pe aceeaşi idee: Pentru $n \in \mathbb{N}$ notăm $x = \overline{\underbrace{1111...1}_{n+1 \text{ cifre}}}$. Atunci

$a = (x+1) \cdot 10^{n+1} + 2x + 3 = (x+1)(9x+1) + 2x + 3 = 9x^2 + 12x + 4 = (3x+2)^2$.)

<u>*Soluţia*</u> 2:

Vom arăta că $a = \overline{\underbrace{1111...1}_{n \text{ cifre}}\underbrace{555...5}_{n-1 \text{ cifre}}6}$ este pătrat perfect pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notăm $x = \overline{\underbrace{1111...1}_{n \text{ cifre}}}$. Atunci, folosind că $9x + 1 = 10^n$, avem

$a = \overline{\underbrace{1111...1}_{n \text{ cifre}}\underbrace{555...5}_{n \text{ cifre}}} + 1 = x \cdot 10^n + 5x + 1 = x(9x+1) + 5x + 1 = 9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2$

adică un pătrat perfect.

Problema 3. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat, iar G, H, I, J, K şi L mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EF]$ şi respectiv $[FA]$. Segmentele $[AH]$, $[BI]$, $[CJ]$, $[DK]$, $[EL]$ şi $[FG]$ mărginesc un hexagon mai mic. Aflaţi raportul dintre aria acestui hexagon şi aria hexagonului $ABCDEF$.

Concurs SUA, 2010

<u>*Soluţie*</u>:

Mai întâi arătăm că hexagonul mic este regulat, apoi vom calcula raportul cerut prin două metode.

Să notăm cu M, N, O, P, Q, R vârfurile hexagonului mic ($\{M\} = AH \cap FG$, $\{N\} = BI \cap AH$, etc) şi cu ℓ lungimea laturii hexagonului mare. Atunci triunghiurile

ABH, BCI ş.a.m.d. sunt congruente (LUL). De aici obţinem congruenţa unghiurilor $\sphericalangle BAH$, $\sphericalangle CBI$, etc respectiv a unghiurilor $\sphericalangle FGA$, $\sphericalangle AHB$, etc. Atunci triunghiurile mici AMG, BNH, etc sunt congruente (ULU). Obţinem de aici congruenţa unghiurilor hexagonului mic şi faptul că acesta are toate laturile egale (ca diferenţe de lungimi de segmente congruente). Prin urmare hexagonul mic este regulat. Raportul dintre ariile celor două hexagoane este pătratul raportului dintre lungimile laturilor (asta se vede şi mai bine descompunând fiecare din cele două hexagoane în 6 triunghiuri echilaterale).

Metoda 1: Cu teorema cosinusului (teorema generalizată a lui Pitagora) în ΔABH obţinem $AH^2 = AB^2 + BH^2 + 2 \cdot AB \cdot BH \cdot \cos 60^\circ = \ell^2 + \dfrac{\ell^2}{4} + 2 \cdot \ell \cdot \dfrac{\ell}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{7\ell^2}{4}$, deci $AH = \dfrac{\ell\sqrt{7}}{2}$. Din $\Delta ABH \sim \Delta AMG$ rezultă $\dfrac{MG}{BH} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AG}{AH} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$, $AM = \dfrac{\ell\sqrt{7}}{7}$, $NH = MG = \dfrac{\ell\sqrt{7}}{14}$ şi $MN = AH - AM - NH = \dfrac{2\ell\sqrt{7}}{7}$. În fine, $\dfrac{\mathscr{A}_{MNOPQR}}{\mathscr{A}_{ABCDEF}} = \left(\dfrac{MN}{AB}\right)^2 = \dfrac{4}{7}$.

Metoda 2: (mai lungă dar fără prea multe calcule)

Din $\Delta ABH \sim \Delta AMG$ rezultă $\dfrac{AM}{MG} = \dfrac{AB}{BH} = 2$, deci $AM = 2MG$.

Inspiraţi de o problemă asemănătoare (pe care o vom prezenta la sfârşitul acestei rezolvări), considerăm simetricele M', N', O', P', Q', R' ale punctelor M, N, O, P, Q, R faţă de punctele G, H, I, J, K şi respectiv L. Deoarece $\Delta AMG \equiv \Delta BM'G$ (şi analoagele), putem „muta" ariile triughiuleţelor AMB, BNH, COI, DFJ, EQK şi FRL în exteriorul hexagonului mare şi obţine că aria hexagonului mare este egală cu suma dintre aria hexagonului mic şi ariile trapezelor $MNBM'$, $NOCN'$, etc. Acestea sunt într-adevăr trapeze deoarece $AMBM'$ este, din construcţie, paralelogram. În plus, cum $AM = 2GM = MM'$ şi $BN = AM$, avem $MM' = M'B = BH$. Dacă notăm $\{S\} = MG \cap BN$, triunghiurile SMN şi $SM'B$ vor fi echilaterale, de unde $SB = M'B = BH$ deci $M'B$ este linie mijlocie în ΔSMN. Atunci $\mathscr{A}_{SM'B} = \dfrac{1}{4} \cdot \mathscr{A}_{SMN}$, deci $\mathscr{A}_{MNBM'} = \dfrac{3}{4} \cdot \mathscr{A}_{SMN} = \dfrac{3S}{4}$ unde am notat cu S aria triunghiului echilateral de latură MN. Descompunând hexagonul $MNOPQR$ în 6 triunghiuri echilaterale de latură MN, obţinem $\mathscr{A}_{MNOPQR} = 6S$ şi $\mathscr{A}_{ABCDEF} = 6S + 6 \cdot \dfrac{3S}{4} = \dfrac{21S}{2}$, de unde concluzia.

Problema care a inspirat construcţia de la Metoda 2 este una foarte asemănătoare:

Fie $ABCD$ un paralelogram şi M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA.

Arătaţi că intersecţiile dreptelor AN, BP, CQ, DM determină un paralelogram şi calculaţi raportul dintre aria acestui paralelogram şi aria paralelogramului $ABCD$.

Soluţie:
Notând cu $\{X\} = AN \cap DM$, $\{Y\} = AN \cap BP$, $\{Z\} = BP \cap CQ$, $\{T\} = CQ \cap DM$ şi cu X', Y', Z', T' simetricele acestor puncte faţă de M, N, P respectiv Q, obţinem 8 triunghiuri congruente: AXM, $BX'M$, BYN, $CY'N$, etc. Înlocuind atunci ariile celor 4 triunghiuri aflate în interiorul paralelogramului $ABCD$ cu ariile celor 4 triunghiuri situate în exteriorul acestuia, obţinem că aria lui $ABCD$ este suma ariilor a 5 paralelograme congruente: $XYZT$, $XYBX'$, $YZCY'$, $ZTDZ'$ şi $TXAT'$. Prin urmare, fără niciun calcul, rezultă că raportul dintre aria paralelogramului mic şi aria paralelogramului mare este $\frac{1}{5}$.