Problema 1. Fie 9 numere naturale care îl divid pe 30^{2009}. Arătaţi că există două dintre acestea având produsul pătrat perfect.

Bogdan Vioreanu, problema C.O:4997 din GM nr. 1/2009

Soluţie: (preluată din GM nr. 7-8-9/2009)
Fie x_i cu $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ divizori ai lui 30^{2009}. Cum $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, rezultă că $x_i = 2^{m_i} \cdot 3^{n_i} \cdot 5^{p_i}$, cu m_i, n_i, $p_i \in \{0, 1, \ldots, 2009\}$ şi $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Cum resturile la împărţirea cu 2 sunt 0 sau 1 şi există 8 triplete cu componentele 0 sau 1, rezultă că există 2 triplete (m_i, n_i, p_i) şi (m_j, n_j, p_j) astfel încât numerele $m_i + m_j$, $n_i + n_j$ şi $p_i + p_j$ sunt toate pare. Notând $m_i + m_j = 2m$, $n_i + n_j = 2n$, $p_i + p_j = 2p$, rezultă că $x_i \cdot x_j = 2^{2m} \cdot 3^{2n} \cdot 5^{2p} = (2^m \cdot 3^n \cdot 5^p)^2$, de unde obţinem concluzia.

Problema 2. Fie a un număr real. Arătaţi că aria triunghiului cu lungimile laturilor $\sqrt{a^2 - a + 1}$, $\sqrt{a^2 + a + 1}$, $\sqrt{4a^2 + 3}$ nu depinde de a.

Marcel Chiriţă, problema C.O:5013. din GM nr. 3/2009

Soluţie: (preluată din GM nr. 7-8-9/2009)
Fie $AB = \sqrt{a^2 - a + 1}$, $AC = \sqrt{a^2 + a + 1}$ şi $BC = \sqrt{4a^2 + 3}$. Atunci $\cos A = \dfrac{-(2a^2 + 1)}{2\sqrt{(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)}} = \dfrac{-(2a^2 + 1)}{2\sqrt{a^4 + a^2 + 1}}$, deci $\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{a^4 + a^2 + 1}}$. Obţinem:

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \sin A}{2} = \frac{\sqrt{a^2 - a + 1} \cdot \sqrt{a^2 + a + 1}}{2} \sin A =$$

$$= \frac{\sqrt{a^4 + a^2 + 1}}{2} \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Problema 3. Arătaţi că ecuaţia $x^{10} + y^{10} = 2010z^{10}$ nu poate avea în mulţimea numerelor întregi decât soluţia $x = y = z = 0$.

Călin Gasparic

Soluţie: Fie (x, y, z) o soluţie a ecuaţiei, cu x, y, z numere întregi. Dacă $z = 0$ atunci rezultă $x = y = 0$. Pentru $z \neq 0$ avem $x \neq 0$ şi $y \neq 0$; în caz contrar se ajunge la contradicţie. Se ştie că „suma a două pătrate perfecte se divide cu 3 dacă şi numai dacă fiecare dintre ele se divide cu 3". Cum 2010 se divide cu 3, iar x^{10} şi y^{10} sunt pătrate perfecte rezultă că $x = 3x_1, y = 3y_1$ cu $0 < x_1 < x$ şi $0 < y_1 < y$. Cu acestea ecuaţia devine $3^{10}x_1^{10} + 3^{10}y_1^{10} =$

$2010z^{10}$, iar după împărţirea la 3 obţinem $3^9x_1^{10}+3^9y_1^{10}=670z^{10}$. De aici deducem că $z=3z_1$ cu $0<z_1<z$ şi ecuaţia devine $3^9x_1^{10}+3^9y_1^{10}=670\cdot 3^{10}z_1^{10}$ sau $x_1^{10}+y_1^{10}=2010z_1^{10}$. Procedând asemănător obţinem $x_2^{10}+y_2^{10}=2010z_2^{10}$ cu $0<x_2<x_1<x,\ 0<y_2<y_1<y, 0<z_2<z_1<z$. Procedeul se poate aplica de o infinitate de ori ceea ce presupune că există o infinitate de numere naturale mai mici decât un număr natural dat. Contradicţie. În concluzie nu avem decât soluţia $x=y=z=0$.

Problema 4. În triunghiul ABC cu $[AB]\equiv[AC]$, mediatoarea laturii AB intersectează pe (BC) în punctul T. În punctul A construim $DA\perp(ABC)$ şi notăm cu P, respectiv N proiecţiile punctului A pe dreptele DT, respectiv DC. Arătaţi că punctele B,P,N sunt coliniare.

Ion Tudor

Soluţie: Vom folosi teorema reciprocă a teoremei lui Menelaus în triunghiul DCT. Va trebui să demonstrăm că $\frac{BT}{BC}\cdot\frac{CN}{ND}\cdot\frac{DP}{PT}=1$. În $\triangle DTA$, $(m(\widehat{A})=90^\circ)$, din teorema catetei avem $AD^2=DP\cdot DT$ şi $AT^2=PT\cdot DT$, de unde $\frac{DP}{PT}=\frac{AD^2}{AT^2}$. Analog, din $\triangle DAC$ obţinem $\frac{CN}{ND}=\frac{AC^2}{AD^2}$. De aici avem $\frac{BT}{BC}\cdot\frac{CN}{ND}\cdot\frac{DP}{PT}=\frac{BT}{BC}\cdot\frac{AC^2}{AD^2}\cdot\frac{AD^2}{AT^2}=\frac{BT\cdot AC^2}{BC\cdot AT^2}$. Pe de altă parte, deoarece T aparţine mediatoarei segmentului $[AB]$, avem $[AT]\equiv[BT]$ şi $\triangle ABC\sim\triangle TAB$. Din asemănarea celor două triunghiuri obţinem $AC^2=BT\cdot BC$. Cu acestea avem $\frac{BT}{BC}\cdot\frac{CN}{ND}\cdot\frac{DP}{PT}=\frac{BT\cdot AC^2}{BC\cdot AT^2}=\frac{BT\cdot BT\cdot BC}{BC\cdot BT^2}=1$. Din ultima relaţie deducem că punctele B,P,N sunt coliniare.