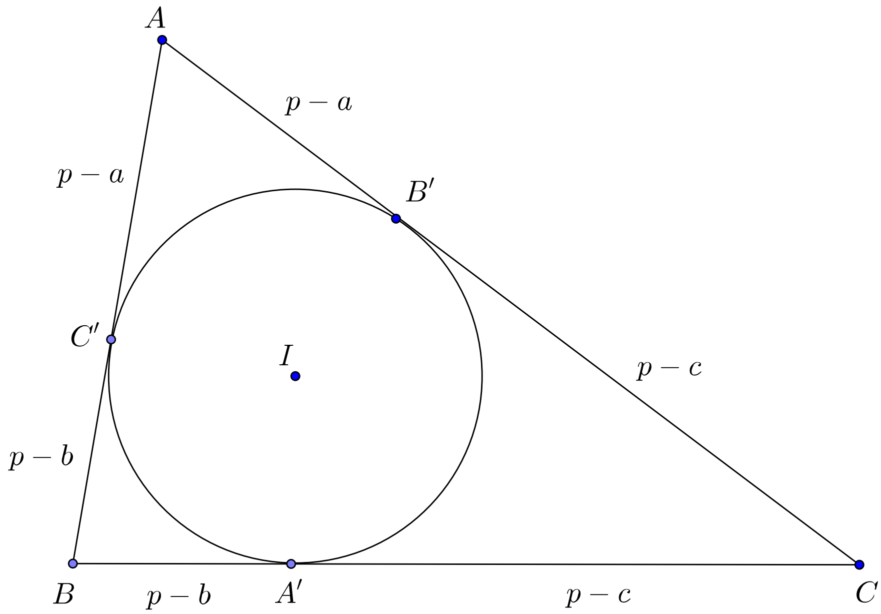
Problema 1. Fie D un punct mobil pe latura (BC) a triunghiului ABC. În triunghiurile ABD şi ACD se înscriu cercurile $\mathscr{C}_1$, respectiv $\mathscr{C}_2$. Tangenta comună exterioară (alta decât BC) a celor două cercuri intersectează segmentul $[AD]$ în punctul M. Găsiţi locul geometric al punctului M.

prelucrare a unei probleme a lui *I. Sharyghin*, (Turneul Oraşelor, 1994)

Soluţie: Vom folosi următoarea

Lemă: Dacă A', B', C' sunt punctele de tangenţă ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile (BC), (CA), (AB), atunci $AB' = AC' = p-a$, $BA' = BC' = p-b$, $CA' = CB' = p-c$, unde $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, iar $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Demonstraţie: Se ştie că lungimile tangentelor duse dintr-un punct exterior unui cerc la acel cerc sunt egale, astfel că avem $AB' = AC' = x$, $BA' = BC' = y$, $CA' = CB' = z$. În plus, $AB' + B'C = AC$ şi analoagele conduc la relaţiile $x + y = c$, $y + z = a$, $z + x = b$ $\quad(*)$. Adunând aceste relaţii şi împărţind la 2 găsim $x+y+z = p$. Scăzând pe rând câte una din relaţiile $(*)$ se obţine concluzia.



Revenind la rezolvarea problemei, fie E, F punctele de tangenţă ale dreptei BC cu cercurile $\mathscr{C}_1$, respectiv $\mathscr{C}_2$, G, H punctele în care cealaltă tangentă comună exterioară intersectează cercurile $\mathscr{C}_1$, respectiv $\mathscr{C}_2$, iar I, J punctele de tangenţă ale dreptei AD cu cele două cercuri ($I \in \mathscr{C}_1$, $J \in \mathscr{C}_2$). Atunci avem:

$$2AM = (AI - MI) + (AJ - MJ) = (AI - MG) + (AJ - MH) = AI + AJ - GH,$$

adică

$$2AM = AI + AJ - EF.$$

Aplicând lema de mai sus în triunghiurile ABD şi ACD avem

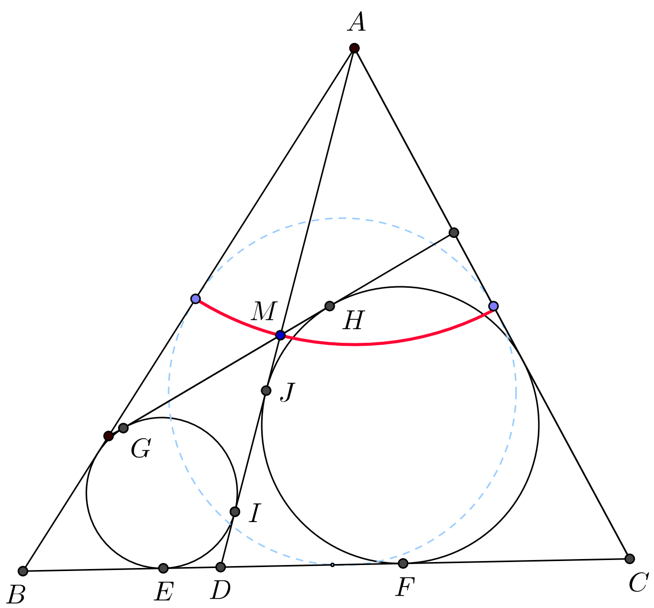
$$AI = \frac{1}{2}(AB + AD - BD) \text{ şi } AJ = \frac{1}{2}(AC + AD - CD).$$

Prin urmare, $2AM = \frac{1}{2}(AB + AC - BC) + AD - EF = \frac{1}{2}(AB + AC - BC) + AD - DE - DF$. Folosind din nou lema, $DE = \frac{1}{2}(AD + BD - AB)$, iar $DF = \frac{1}{2}(AD + CD - AC)$, deci $2AM = \frac{1}{2}(AB + AC - BC) + AD - \frac{1}{2}(AD + BD - AB) - \frac{1}{2}(AD + CD - AC) = AB + AC - BC$.

Cu notaţiile standard în triunghi, am obţinut aşadar că $AM = p-a$, adică distanţa de la M la A este constantă, ceea ce înseamnă că M aparţine cercului de centru A şi rază $p - a$, şi asta pentru orice poziţie a punctului D. În plus, punctul M se află în interiorul unghiului $\angle BAC$, deci locul geometric căutat, $\mathscr{G}$, este inclus în mulţimea $\mathscr{C}(A, p - a) \cap int(\angle BAC)$.

În continuare vom arăta incluziunea inversă. Considerăm M un punct oarecare al mulţimii $\mathscr{C}(A, p - a) \cap int(\angle BAC)$. Fie D punctul în care semidreapta $(AM$ intersectează latura $[BC]$. Considerăm cercurile înscrise în triunghiurile ABD şi ACD, tangenta comună exterioară a acestora (diferită de BC) şi M' punctul în care această tangentă intersectează segmentul $[AD]$. Din cele de mai sus, $AM' = p - a = AM$, deci M' coincide cu M, prin urmare M aparţine locului geometric.

În concluzie, locul geometric căutat este mulţimea $\mathscr{C}(A, p-a) \cap int(\angle BAC)$, marcată cu roşu în figura de mai jos.



Observaţie: Locul geometric este uşor de ghicit alegând câteva poziţii particulare ale lui D. Din păcate, în cazurile ,,limită", $D = B$ şi $D = C$ punctul M nu este unic definit (AD şi tangenta GH coincid), deşi punctele în care cercul $\mathscr{C}(A, p-a)$ intersectează laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului sunt tocmai punctele de tangenţă ale cercului înscris în triunghiul ABC cu cele două laturi.

O foarte sugestivă animaţie în Geogebra pe care ne-a trimis *Ştefan-Alexandru Obada*. O puteţi viziona pe youtube.

Problema 2. Arătaţi că pentru orice $a, b, c \in (0, \infty)$ cu $a + b + c = 3$ are loc inegalitatea

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \geq \sqrt{3}.$$

Alexandru Mihalcu

Soluţie:
Vom demonstra că, în general, dacă $a, b, c \in (0, \infty)$ atunci

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \geq \sqrt{a+b+c},$$

de unde, ţinând cont de condiţia $a + b + c = 3$, concluzia va rezulta imediat.

Împărţind cu $\sqrt{a+b+c} > 0$, inegalitatea de mai sus se scrie echivalent

$$\frac{a}{\sqrt{(a+2b)(a+b+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+2c)(a+b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+2a)(a+b+c)}} \geq 1.$$

Folosind inegalitatea mediilor, avem că

$$\sqrt{(a+2b)(a+b+c)} \leq \frac{(a+2b)+(a+b+c)}{2} = \frac{2a+3b+c}{2}$$

şi analoagele, deci

$$\frac{a}{\sqrt{(a+2b)(a+b+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+2c)(a+b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+2a)(a+b+c)}} \geq$$

$$\frac{2a}{2a+3b+c} + \frac{2b}{2b+3c+a} + \frac{2c}{2c+3a+b}.$$

Este atunci suficient să demonstrăm că

$$\frac{a}{2a+3b+c} + \frac{b}{2b+3c+a} + \frac{c}{2c+3a+b} \geq \frac{1}{2}.$$

Această inegalitate se demonstrează clasic: se amplifică fiecare din fracţiile din membrul stâng cu numitorul ei pentru a obţine un pătrat, apoi se aplică inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz (CBS), forma Bergström:

$$\frac{a}{2a+3b+c} + \frac{b}{2b+3c+a} + \frac{c}{2c+3a+b} =$$

$$\frac{a^2}{2a^2+3ab+ac}+\frac{b^2}{2b^2+3bc+ab}+\frac{c^2}{2c^2+3ac+bc}\overset{CBS}{\geq}$$
$$\frac{(a+b+c)^2}{(2a^2+3ab+ac)+(2b^2+3bc+ab)+(2c^2+3ac+bc)}=$$
$$\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)}=\frac{1}{2}.$$

Cu aceasta, inegalitatea este demonstrată.
Pentru a avea egalitate, este necesar (printre altele), să avem egalitate în inegalitatea mediilor, adică $a+2b=a+b+c$ şi analoagele. De aici rezultă că, pentru egalitate, trebuie ca $a=b=c$. Această condiţie este şi suficientă pentru inegalitatea pe care ne-am propus s-o demonstrăm. Pentru cea din enunţ, trebuie, în plus, ca $a=b=c=1$.

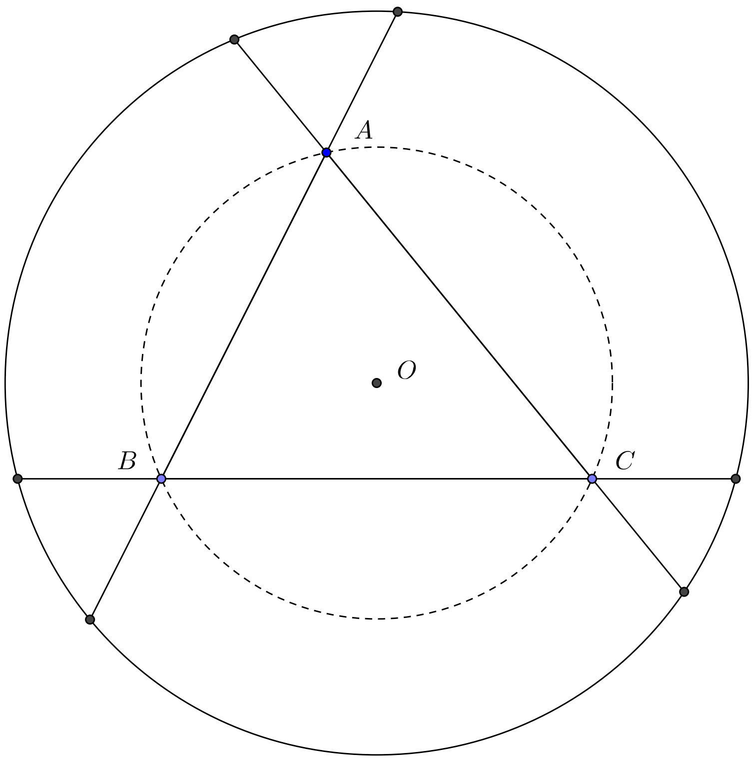
Problema 3. Fie triunghiul ABC şi numărul real k astfel încât $4k$ este mai mare decât pătratele lungimilor laturilor triunghiului.
Considerăm mulţimea $\mathcal{M}=\{X\in BC \mid XB\cdot XC=k\}$. Analog definim mulţimile $\mathcal{N}$ şi $\mathcal{P}$ relativ la dreptele AC şi respectiv AB.
a) Determinaţi cardinalul mulţimii $\mathcal{T}=\mathcal{M}\cup\mathcal{N}\cup\mathcal{P}$.
b) Demonstraţi că punctele din mulţimea $\mathcal{T}$ sunt conciclice.

Leonard Giugiuc

Soluţie:
a) Vom arăta că mulţimea $\mathcal{M}$ conţine două elemente. Analog se arată că $\mathcal{N}$ şi $\mathcal{P}$ conţin câte două elemente, diferite de vârfurile triunghiului. Atunci mulţimile $\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}$ sunt disjuncte două câte două, prin urmare reuniunea lor are 6 elemente.
• Dacă $X\in[BC]$, ar trebui ca $XB\cdot(BC-XB)=k>\frac{BC^2}{4}$, de unde $BC^2-4BC\cdot XB+4XB^2<0$, adică $(BC-2XB)^2<0$, absurd. Prin urmare niciun punct al segmentului $[BC]$ nu aparţine lui $\mathcal{M}$.
• Dacă $X\in BC\setminus[BC$, atunci $XB\cdot XC=XB\cdot(XB+BC)=k$, adică $XB^2+XB\cdot BC+\frac{BC^2}{4}=k+\frac{BC^2}{4}$, ceea ce revine la $\left(XB+\frac{BC}{2}\right)^2=k+\frac{BC^2}{4}$. De aici rezultă $XB+\frac{BC}{2}=\sqrt{k+\frac{BC^2}{4}}$ şi, în final $XB=\sqrt{k+\frac{BC^2}{4}}-\frac{BC}{2}>0$. Evident, există un unic asemenea punct pe semidreapta opusă lui $[BC$. Analog se arată că există un unic punct pe semidreapta opusă lui $[CB$ care să aparţină mulţimii $\mathcal{M}$. Prin urmare, mulţimea $\mathcal{M}$ are exact două puncte, iar mulţimea $\mathcal{T}$ are şase elemente.
b) Fie $\mathscr{C}(O,R)$ cercul circumscris triunghiului ABC. Condiţia $X\in\mathcal{T}$ implică faptul că puterea punctului X faţă de cercul $\mathscr{C}$ este egală cu k. Avem, deci, $k=\rho(X)=XO^2-R^2$, $\forall\, X\in\mathcal{T}$, de unde $XO=\sqrt{k+R^2}$, $\forall\, X\in\mathcal{T}$. Rezultă că toate cele 6 puncte din mulţimea $\mathcal{T}$ sunt situate la aceeaşi distanţă, $R'=\sqrt{k+R^2}$,

de punctul O, adică sunt situate pe cercul de centru O şi rază R'.

Observaţie: Dacă $k = \dfrac{BC^2}{4}$, atunci mulţimea $\mathcal{M}$ are trei elemente: mijlocul lui $[BC]$ şi câte un punct în exteriorul segmentului $[BC]$, de o parte şi de cealaltă a acestuia.
Pentru $k \in \left(0, \dfrac{BC^2}{4}\right)$, mulţimea $\mathcal{M}$ are 4 elemente (două pe segmentul $[BC]$ şi două în exterior, câte unul de fiecare parte).
Evident, în aceste cazuri afirmaţia de la punctul **b)** al problemei nu mai rămâne adevărată.



Problema 4. Pe un cerc sunt plasate 2014 monede, toate cu ,,stema" în sus. Sunt permise două tipuri de mutări:
1. se pot întoarce 4 monede consecutive;
2. se pot întoarce 4 monede dispuse XXOXX, unde X desemnează poziţiile monedelor care vor fi întoarse, iar O este poziţia unei monede care nu va fi mişcată.
Este posibil ca, după un număr finit de mutări, toate monedele să fie cu ,,banul" în sus?

Turneul Oraşelor, 1994

Soluţie:
Vopsim monedele, alternativ, cu roşu şi albastru (oricare două monede vecine vor fi vopsite cu culori diferite). Iniţial, sunt 1007 monede roşii cu ,,stema" în sus. La orice mutare sunt întoarse două monede albastre şi două monede roşii. Ne uităm la efectul unei mutări asupra celor două monede roşii. Dacă erau două cu ,,stema" în sus, după mutare vor fi ambele cu ,,banul" în sus, deci numărul total al monedelor roşii care au ,,stema" în sus va scădea cu 2. Dacă exact una dintre cele două monede roşii era cu ,,stema" în sus, atunci şi după efactuarea mutării vom avea tot că una din cele două monede roşii implicate în mutare este cu ,,stema" în sus, anume cealaltă monedă decât cea care era înaintea efectuării mutării. Prin urmare, în acest caz numărul total al monedelor roşii care au ,,stema" în sus nu se schimbă. În fine, dacă înaintea mutării, cele două monede roşii implicate în mutare erau cu ,,banul" în sus, după mutare ele vor avea ,,stema" în sus, deci numărul total de monede roşii care au ,,stema" în sus creşte cu 2. În concluzie, oricare ar fi mutarea, *paritatea numărului de monede roşii care au ,,stema" în sus* nu se schimbă, adică este un *invariant.*
Iniţial, această sumă era 1007, adică impară. Prin urmare, în toate poziţiile ulterioare, această sumă rămâne impară. La final, dacă ar fi posibil ca să ajungem în poziţia în care toate monedele (în particular toate monedele roşii) să fie cu ,,banul" în sus, am avea suma egală cu 0, adică pară, ceea ce nu este posibil. Prin urmare nu putem face ca toate monedele să fie cu ,,banul" în sus.