Problema 1. Numerele reale x, y, z, t satisfac egalităţile $x + y + z + t = 0$ şi $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$. Demonstraţi că

$$-1 \leq xy + yz + zt + tx \leq 0.$$

Concurs Austria-Polonia

Soluţia 1:
Deoarece $xy + yz + zt + tx = (x + z)(y + t) = -(x + z)^2 \leq 0$, inegalitatea din dreapta este evidentă.
Pentru prima inegalitate, putem observa că

$$1 = (x^2 + z^2) + (y^2 + t^2) \geq \frac{1}{2}\left[(x + z)^2 + (y + t)^2\right] \geq |(x + z)(y + t)|.$$

Soluţia 2: Scriem că $0 = (x+y+z+t)^2 = (x^2+y^2+z^2+t^2)+2(xy+yz+zt+tx)+2(xz+yt) = (x-z)^2+(y-t)^2+2(xy+yz+zt+tx) \geq 2(xy+yz+zt+tx)$, de unde inegalitatea din dreapta.
Pentru cea din stânga, $0 = (x+y+z+t)^2 = (x^2+y^2+z^2+t^2)+2(xy+yz+zt+tx)+2xz+2yt \leq (x^2+y^2+z^2+t^2)+2(xy+yz+zt+tx)+(x^2+z^2)+(y^2+t^2) = 2+2(xy+yz+zt+tx)$, de unde concluzia.

Problema 2. Pe planeta P sunt n ţări, unde $50 < n < 80$. Oricare două ţări diferite sunt fie prietene, fie duşmane. Relaţia este mutuală. Pentru oricare trei ţări distincte A, B, C sunt valabile următoarele două reguli:
(1) dacă A e prietenă cu B, iar B este prietenă cu C, atunci A este prietenă cu C; („prietenii prietenilor mei îmi sunt prieteni")
(2) dacă A şi B sunt duşmani, iar B şi C sunt duşmani, atunci A este prietenă cu C. („duşmanii duşmanilor mei îmi sunt prieteni")
Se ştie că exact jumătate din numărul total al relaţiilor existente între două ţări sunt de prietenie, iar cealaltă jumătate sunt de duşmănie. Câte ţări sunt pe planeta P?

Concursul Arany Dániel, Ungaria, 2014

Soluţie:
Să fixăm o ţară X. Conform regulilor, ţările rămase se împart în două mulţimi: prietene cu X şi duşmane cu X. Adăugăm ţara X la prima mulţime. Acum oricare două ţări sunt prietene dacă sunt în aceeaşi mulţime şi duşmane dacă sunt în mulţimi diferite. (Pe scurt: avem un război mondial în care ţările sunt împărţite în două tabere; nu există ţări neutre.)
• Dacă notăm cu a şi b numărul de ţări din cele două tabere ($a + b = n$), avem $\dfrac{a(a-1)}{2}$ relaţii de prietenie între ţările din prima tabără şi $\dfrac{b(b-1)}{2}$ relaţii de prietenie între ţările din cea de-a doua tabără. Într-adevăr, numerotând ţările din

prima tabără cu $x_1, x_2, \ldots, x_a$, atunci x_1 are $a-1$ prieteni, x_2 are $a-2$ alţi prieteni (prietenia cu x_1 a fost deja socotită) şi aşa mai departe, x_{a-1} îl mai are numai pe x_a ca prieten, deci între ţările primei tabere există $1+2+\ldots+(a-1)=\dfrac{a(a-1)}{2}$ relaţii de prietenie.

• Între ţările din tabere diferite există în total ab relaţii de duşmănie (fiecare din cele a ţări din prima tabără este în duşmănie cu fiecare din cele b ţări din cea de-a doua tabără.)

• Prin urmare trebuie să avem $\dfrac{a(a-1)}{2}+\dfrac{b(b-1)}{2}=ab$, relaţie care se scrie echivalent $a^2-a+b^2-b=2ab$, sau $a^2-2ab+b^2=a+b$, adică $(a-b)^2=a+b$, deci $n=a+b$ trebuie să fie pătrat perfect. Singurul pătrat perfect cuprins în intervalul $(50,80)$ fiind 64, rezultă că pe planeta P sunt 64 de ţări.

Remarcă: Se poate deduce că $|a-b|=8$, deci cele două tabere au 28 şi 36 ţări.

Problema 3. Determinaţi toate perechile de numere naturale prime (p,q) pentru care p^2+pq+q^2 este pătrat perfect.

Olimpiadă Siria [1]

Soluţie:
Fie $a \in \mathbb{N}$ astfel ca $p^2+pq+q^2=a^2$. Atunci $pq=(p+q)^2-a^2=(p+q-a)(p+q+a)$. Singurii divizori ai lui pq fiind $1, p, q$ şi pq, cum $p+q+a>\max\{1,p,q\}$, rezultă că $p+q+a=pq$ şi $p+q-a=1$. Prin adunare rezultă $2p+2q=pq+1$, adică $(p-2)(q-2)=3$. Deducem că $\{p-2,\ q-2\}=\{1,\ 3\}$, adică $\{p,q\}=\{3,5\}$.

Reciproc, perechile $(p,q)=(3,5)$ şi $(p,q)=(5,3)$ satisfac într-adevăr condiţia din enunţ: $3^2+3\cdot 5+5^2=49=7^2$.
În concluzie, perechile căutate sunt $(p,q)=(3,5)$ şi $(p,q)=(5,3)$.

Problema 4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub şi punctele mobile $M \in (AC)$, $N \in (A'B)$ astfel încât $AM=A'N$. Aflaţi locul geometric al mijlocului segmentului $[MN]$.

* * *

Soluţia 1: Notăm cu P, Q, R mijloacele segmentelor $[MN]$, $[BC]$ şi, respectiv, $[AA']$ şi fie S proiecţia lui N pe AB. Vom arăta că locul geometric al lui P este segmentul (QR). Evident, $S \in AB$. Deoarece $AS=\dfrac{A'N\sqrt{2}}{2}=\dfrac{AM\sqrt{2}}{2}$, triunghiul ASM este dreptunghic isoscel. Apoi, cum $NS \parallel AA'$, $MS \parallel AD$ şi $AA' \perp AD$, triunghiul MSN este dreptunghic. Atunci $AB \perp (MSN)$, deci proiecţia lui P

[1] Îi mulţumim domnului *Marian Cucoaneş* pentru a ne fi sugerat problema.

pe (ABC) cade în mijlocul lui $[MS]$, adică pe mediana $[AQ]$ a triunghiului ABC. Aşadar P aparţine planului care conţine AQ şi este perpendicular pe (ABC), adică planului $(A'AQ)$. Analog se arată că P se află în planul care conţine BR şi este perpendicular pe (ABA'), adică planului (BCR). Intersecţia celor două plane fiind dreapta QR, deducem că $P \in (QR)$.
Reciproc, dacă $P \in (QR)$, fie T proiecţia lui P pe planul (ABC). Atunci $T \in (AQ)$. Prin T ducem paralela MS la BC, cu $M \in AC$ şi $S \in AB$. Ducem $SN \parallel AA'$, $N \in A'B$. Cum P se proiectează pe catetele (MS) şi (NS) ale triunghiului MSN în mijloacele acestora, P este mijlocul ipotenuzei (MN). În plus, $A'N = AM = AS\sqrt{2}$, prin urmare orice punct al segmentului (QR) aparţine locului geometric.

Prezentăm mai jos şi o soluţie vectorială, pe post de aperitiv pentru ceea ce va urma să studiaţi în clasa a IX-a.

Soluţia 2: Vom folosi notaţiile de mai sus şi vom pune $x = \dfrac{A'N}{A'B} = \dfrac{AM}{AC}$.
Atunci x parcurge tot intervalul $(0,1)$. Se ştie că dacă Y, Z sunt mijloacele segmentelor $[UV]$, respectiv $[WX]$, atunci $\overrightarrow{YZ} = \dfrac{\overrightarrow{UW} + \overrightarrow{VX}}{2}$.

Folosind acest rezultat obţinem că $\overrightarrow{RP} = \dfrac{\overrightarrow{A'N} + \overrightarrow{AM}}{2} = \dfrac{x\overrightarrow{A'B} + x\overrightarrow{AC}}{2} = x\overrightarrow{RQ}$, ceea ce este echivalent cu $P \in (RQ)$.