Problema 1. Aria unui triunghi care are lungimile laturilor a, b, c este
$$\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4}.$$
Care este măsura unghiului cel mai mare are triunghiului?

Concursul KöMaL, Ungaria, 2004

Soluţie:
Conform formulei lui Heron, aria triunghiului este $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, adică $\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$. Din ipoteză rezultă atunci că
$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4}$$
adică
$$(a-b+c)(-a+b+c) = (a+b+c)(a+b-c),$$
relaţie care revine la $c^2 = a^2 + b^2$. Conform reciprocei teoremei lui Pitagora, triunghiul este dreptunghic, deci măsura celui mai mare unghi al său este $90°$.

Problema 2. Feţele unui cub de lemn de latură 4 cm se colorează în negru, apoi cubul este împărţit în cubuleţe de latură 1 cm.
a) Câte cubuleţe au o faţă neagră, câte au două feţe negre şi câte au trei feţe negre?
b) E posibil ca toate cubuleţele să fie aşezate pe o masă astfel încât să se formeze o tablă de şah?
c) E posibil ca toate cubuleţele să fie aşezate pe o masă astfel încât să se formeze două table de şah, una cu faţa în sus, cealaltă cu faţa în jos?

Concurs Bulgaria

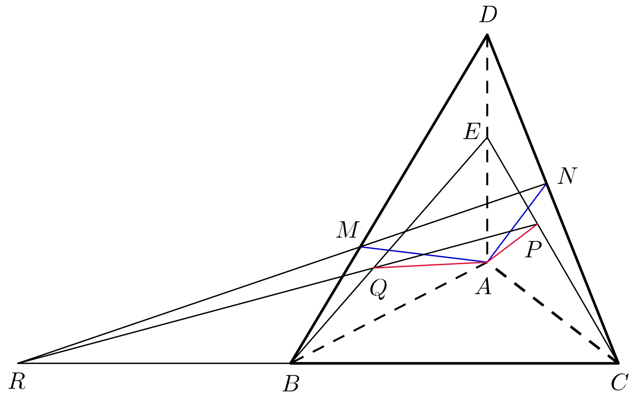
Soluţie:
a) Cubuleţe cu trei feţe negre sunt cele 8 plasate în vârfurile cubului.
Cubuleţe cu câte două feţe negre sunt două pe fiecare din cele 12 muchii ale cubului, aşadar 24 în total.
Cubuleţe cu câte o faţă neagră avem 4 pe fiecare din cele 6 de feţe ale cubului, deci 24 în total.
b) Avem 64 de cubuleţe, dintre care $8 + 24 + 24 = 56$ au măcar o faţă neagră. Luăm 32 dintre acestea şi le punem cu faţa neagră în sus. Celelalte cubuleţe au măcar o faţă albă, deci le putem pune cu o faţă albă în sus. Apoi putem aranja cubuleţele pe masă pentru a forma tabla de şah.
c) Deoarece niciun cubuleţ nu are două feţe opuse negre, cele 32 de cubuleţe care ar trebui să stea cu faţa neagră în sus şi cele 32 de cubuleţe care ar trebui să stea cu faţa neagră în jos ar trebui să fie distincte. Ori nu dispunem decât de 56 de cubuleţe cu măcar o faţă neagră, deci nu putem obţine două table de şah.

Problema 3. Se consideră un tetraedru $[ABCD]$ în care muchia $[AD]$ este perpendiculară pe faţa (ABC) şi E un punct al muchiei (AD). Notăm cu M, N, P, Q proiecţiile punctului A respectiv pe dreptele BD, CD, CE şi BE. Arătaţi că punctele M, N, P, Q sunt coplanare şi apoi demonstraţi că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

Mihai Miculiţa – Culegere de probleme *Principii şi structuri fundamentale în matematica de liceu*, vol. II, Editura Albatros, 1986

Soluţie:

• Fiind perpendiculară pe planul (ABC), muchia AD este perpendiculară şi pe AB şi pe AC, deci triunghiurile DAB şi DAC sunt dreptunghice în A. Aplicând teorema catetei în aceste triunghiuri, obţinem $DA^2 = DM \cdot DB = DN \cdot DC$, relaţie care ne arată că patrulaterul $BMNC$ este inscriptibil.



• Distingem în continuare două cazuri: **1.** $AB = AC$ şi **2.** $AB \neq AC$.

În cazul **1.** rezultă că $DB = DC$ (din congruenţa triunghiurilor DAB şi DAC), apoi $DN = DM$, de unde $MN \parallel BC$. Analog rezultă succesiv $EB = EC$, $EP = EQ$ şi $PQ \parallel BC$. Aşadar în acest caz dreptele MN şi PQ sunt paralele, deci coplanare. Apoi se arată uşor că $\Delta MAB \equiv \Delta NAC$ (I.C.) şi $\Delta QAB \equiv \Delta PAC$ (I.C.). De aici rezultă $AM = AN$, $AP = AQ$ şi $\angle MAQ \equiv \angle NAP$ (ca diferenţă de unghiuri congruente). Obţinem că $\Delta MAQ \equiv \Delta NAP$ (L.U.L.), deci $MQ = NP$, deci $MNPQ$ este trapez isoscel sau paralelogram. Însă deoarece $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{DM}{DB} = \dfrac{DA^2}{DB^2} = \sin^2(\angle ABD)$, iar $\dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{EQ}{EB} = \dfrac{EA^2}{EB^2} = \sin^2(\angle ABE)$, se vede uşor că $PQ \neq MN$, deci că $MNPQ$ este trapez isoscel, adică un patrulater inscriptibil.

• În cazul **2.**, din relaţiile $\dfrac{DM}{DB} = \dfrac{DA^2}{DB^2} \neq \dfrac{DA^2}{DC^2} = \dfrac{DN}{DC}$, rezultă că dreapta MN nu este paralelă cu BC. Fie atunci $\{R\} = MN \cap BC$. Din teorema lui Menelaus aplicată triunghiului BCD şi transversalei $R - M - N$ obţinem $\dfrac{CN}{ND} \cdot \dfrac{DM}{MB} \cdot \dfrac{BR}{RC} = 1$.

Folosind relaţiile $\dfrac{DM}{MB} = \dfrac{AD^2}{AB^2}$ şi $\dfrac{DN}{NC} = \dfrac{AD^2}{AC^2}$ (obţinute exprimând ,,catetele" AB, AC şi AD cu teorema catetei în triunghiurile ABD şi ACD), obţinem că $\dfrac{BR}{RC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. Această relaţie arată că poziţia punctului R pe dreapta BC nu depinde de poziţia punctului D pe perpendiculara în A pe planul (BCD). Aşadar şi dreapta PQ va trece tot prin punctul R. Deducem că dreptele PQ şi MN sunt concurente în R, deci coplanare.

• Deoarece, aşa cum am văzut la început, patrulaterul $BMNC$ este inscriptibil, din puterea punctului R faţă de cercul circumscris patrulaterului $BMNC$ obţinem $RB \cdot RC = RM \cdot RN$. Analog se arată că şi $BQPC$ este inscriptibil, deci $RB \cdot RC = RQ \cdot RP$. De aici rezultă că $RM \cdot RN = RQ \cdot RP$, deci $MNPQ$ este patrulater inscriptibil.

• Nu cădeţi în capcana de a spune că MN şi PQ, fiind antiparalele cu BC în triunghiurile DBC respectiv EBC, sunt paralele între ele!

Problema 4. Demonstraţi că prntru $a = 1$, $a = 2$ şi $a = 4$ ecuaţia $x(x + a) = y^2$ nu are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule şi că pentru orice altă valoare a lui $a \in \mathbb{N}^*$ ecuaţia are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule.

Revista Kvant

Soluţie:

Înmulţind cu 4, ecuaţia se scrie echivalent $4x^2 + 4xa + a^2 - a^2 = 4y^2$, adică $(2x + a)^2 - (2y)^2 = a^2$, sau $(2x + a - 2y)(2x + a + 2y) = a^2$. Trebuie aşadar să-l scriem pe a^2 ca produs de două numere naturale nenule, de aceeaşi paritate (e clar că trebuie $x < y$ şi că factorii $2x + a - 2y$ şi $2x + a + 2y$ sunt diferiţi dar au aceeaşi paritate). Este evident că nu există asemenea scrieri pentru $a = 1$, $a = 2$ şi $a = 4$.

Să demonstrăm că ecuaţia are soluţii pentru $a \notin \{1, 2, 4\}$ Fie $a = 2^m(2j + 1)$, cu $m, j \in \mathbb{N}$. Dacă $j > 0$, alegem $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $2x + a - 2y = 2^m$ şi $2x + a + 2y = 2^m(2j + 1)^2$. Scăzând cele două relaţii obţinem $y = 2^m(j^2 + j) \in \mathbb{N}^*$, apoi $x = 2^m j^2 \in \mathbb{N}^*$. Aşadar, ecuaţia are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule.

Mai rămâne cazul în care $j = 0$, adică $a = 2^m$, $m \geq 3$. În acest caz alegem $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $2x + a - 2y = 2^{m-1}$ şi $2x + a + 2y = 2^{m+1}$. Scăzând cele două relaţii obţinem $y = 3 \cdot 2^{m-3} \in \mathbb{N}^*$, apoi $x = 2^{m-3} \in \mathbb{N}^*$. Aşadar, şi în acest caz ecuaţia are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule.

În concluzie, ecuaţia are soluţii naturale nenule dacă şi numai dacă $a \notin \{1, 2, 4\}$.

Pentru a demonstra prima parte a afirmaţiei din enunţ se poate proceda şi astfel: dacă $a \leq 4$, atunci $x^2 < x^2 + xa \leq x^2 + 4x < (x+2)^2$, deci y^2 poate fi numai $(x+1)^2$. În acest caz trebuie ca $ax = 2x + 1$, adică $(a - 2)x = 1$, de unde $a - 2 = x = 1$, prin urmare, cu $a \leq 4$, ecuaţia are soluţii numai dacă $a = 3$.