Problema 1. Fie a, b, c numere reale pozitive cu $a^2+b^2+c^2=1$. Aflaţi minimul expresiei
$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}.$$

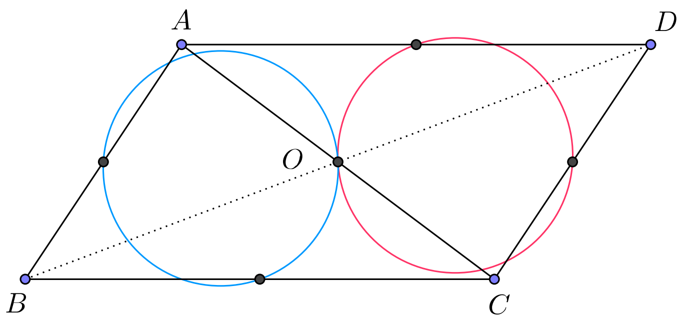
* * *

Soluţie:
Vom arăta că $\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2)$, $\forall\, a,b,c>0$, de unde va rezulta imediat că minimul căutat este cel puţin $\sqrt{3}$.
Avem, folosind $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$, $\forall\, x,y,z$, că
$$\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2)=3.$$
Deoarece valoarea $\sqrt{3}$ este atinsă pentru $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$, rezultă că minimul căutat este $\sqrt{3}$.

Problema 2. Fie $ABCD$ un paralelogram. Arătaţi că cercurile Euler ale triunghiurilor ABC şi ADC sunt tangente.

Concursul KöMaL, Ungaria

Soluţie:
Punctul O, de intersecţie a diagonalelor, aparţine ambelor cercuri. Dacă cele două cercuri ar mai avea un punct, P, în comun, atunci via simetria de centru O (care păstrează intersecţia celor două cercuri), ar rezulta că şi simetricul lui P în raport cu O ar aparţine intersecţiei celor două cercuri, deci cele două cercuri ar avea cel puţin trei puncte în comun. Cum cele două cercuri nu pot coincide, am ajuns la contradicţie. Prin urmare, cele două cercuri au în comun doar punctul O, deci sunt tangente în punctul O.



Problema 3. O submulţime a mulţimii $\{1, 2, 3 \ldots, 50\}$ se numeşte *specială* dacă nu conţine nicio pereche de forma $\{x, 3x\}$. O submulţime specială se numeşte *superspecială* dacă ea are numărul maxim posibil de elemente. Câte elemente are o submulţime superspecială şi câte submulţimi superspeciale există?

Olimpiadă Finlanda, 2013

Soluţie:
Considerăm submulţimile: $A_1 = \{1, 3, 9, 27\}$, $A_2 = \{2, 6, 18\}$, $A_3 = \{4, 12, 36\}$, $A_4 = \{5, 15, 45\}$, $A_5 = \{7, 21\}$, $A_6 = \{8, 24\}$, $A_7 = \{10, 30\}$, $A_8 = \{11, 33\}$, $A_9 = \{13, 39\}$, $A_{10} = \{14, 42\}$ şi $A_{11} = \{16, 48\}$. Considerând elementele fiecăreia din aceste submulţimi ca fiind aranjate în ordine crescătoare, o submulţime specială nu poate conţine elemente consecutive ale niciuneia din mulţimi. Astfel, dintr-o submulţime specială pot face parte: cel mult două elemente (neconsecutive) din mulţimile A_1, A_2, A_3, A_4 (neconsecutive) şi cel mult un element din mulţimile $A_5, A_6, \ldots, A_{11}$. Pentru a obţine o submulţime superspecială, trebuie să scoatem din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 50\}$ două elemente din mulţimea A_1 şi câte unul din mulţimile $A_2, \ldots, A_{11}$, în total 12 elemente.
Reciproc, dacă scoatem două elemente din A_1 astfel încât numerele rămase să nu fie vecine (adică să scoate 1 şi 9, 3 şi 9 sau 3 şi 27), scoatem din mulţimile A_2, A_3, A_4 elementul mijlociu (6, 12 şi 15), iar din fiecare din mulţimile $A_5, A_6, \ldots, A_{11}$ câte un element, vom obţine o submulţime specială cu 38 de elemente. Aşadar o submulţime specială are cel mult 38 de elemente şi există submulţimi speciale cu 38 de elemente, prin urmare submulţimile superspeciale au 38 de elemente.
Ele se obţin eliminând din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 50\}$ următoarele elemente:
- din mulţimea A_1 trebuie să îi eliminăm fie pe 1 şi pe 9, fie pe 3 şi pe 9, fie pe 3 şi pe 27 (3 variante)
- din mulţimea A_2 trebuie să îl eliminăm pe 6 (o variantă)
- din mulţimea A_3 trebuie să îl eliminăm pe 12 (o variantă)
- din mulţimea A_4 trebuie să îl eliminăm pe 15 (o variantă)
- din mulţimea A_5 trebuie să îl eliminăm fie pe 7, fie pe 21 (2 variante)
- din mulţimea A_6 trebuie să îl eliminăm fie pe 8, fie pe 24 (2 variante)
- din mulţimea A_7 trebuie să îl eliminăm fie pe 10, fie pe 30 (2 variante)
- din mulţimea A_8 trebuie să îl eliminăm fie pe 11, fie pe 33 (2 variante)
- din mulţimea A_9 trebuie să îl eliminăm fie pe 13, fie pe 39 (2 variante)
- din mulţimea A_{10} trebuie să îl eliminăm fie pe 14, fie pe 42 (2 variante)
- din mulţimea A_{11} trebuie să îl eliminăm fie pe 16, fie pe 48 (2 variante)

Conform regulii produsului, putem face eliminările în $3 \cdot 2^7 = 384$ de moduri, deci sunt 384 de mulţimi superspeciale.

Problema 4. Determinaţi perechile (x, y) de numere întregi pentru care

$$28 + x^2(y - 2) + y^2(x - 2) = 0.$$

* * *

Soluţie:
Ecuaţia din enunţ se scrie echivalent:
$xy(x+y) - 2x^2 - 2y^2 = -28$, sau $xy(x+y) - 2(x+y)^2 + 4xy = -28$, adică $xy(x+y+4) - 2(x+y)^2 + 32 = 4$, sau încă $xy(x+y+4) - 2(x+y-4)(x+y+4) = 4$ şi, în fine, $(x+y+4)(xy-2x-2y+8) = 4$.
Deosebim mai multe cazuri:
I. $x+y+4 = -4$, $xy-2x-2y+8 = -1$; II. $x+y+4 = -2$, $xy-2x-2y+8 = -2$; III. $x+y+4 = -1$, $xy-2x-2y+8 = -4$; IV. $x+y+4 = 1$, $xy-2x-2y+8 = 4$; V. $x+y+4 = 2$, $xy-2x-2y+8 = 2$; VI. $x+y+4 = 4$, $xy-2x-2y+8 = 1$.
• În cazul I. obţinem $x+y = -8$, $xy = -25$. Analizând divizorii întregi ai lui 25 constatăm că în acest caz nu avem soluţie.
• În cazul II. obţinem $x+y = -6$, $xy = -22$. Analizând divizorii întregi ai lui 22 constatăm că în acest caz nu avem soluţie.
• În cazul III. obţinem $x+y = -5$, $xy = -22$. Analizând divizorii întregi ai lui 22 constatăm că în acest caz nu avem soluţie.
• În cazul IV. obţinem $x+y = -3$, $xy = -10$. Analizând divizorii întregi ai lui 25 constatăm că în acest avem soluţiile $x = 2$, $y = -5$ şi $x = -5$, $y = 2$
• În cazul V. obţinem $x+y = -2$, $xy = -10$. Analizând divizorii întregi ai lui 10 constatăm că în acest caz nu avem soluţie.
• În cazul VI. obţinem $x+y = 0$, $xy = -7$. Analizând divizorii întregi ai lui 7 constatăm că în acest caz nu avem soluţie.
În concluzie, unicele două soluţii ale ecuaţiei sunt $x = 2$, $y = -5$ şi $x = -5$, $y = 2$.