Problema 1. Demonstraţi că dacă $a, b, c > 1$ sunt numere reale, atunci are loc inegalitatea

$$abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > a + b + c + \frac{1}{abc}.$$

* * *

Soluţie: Inegalitatea se rescrie echivalent $\frac{1}{abc}(ab-1)(bc-1)(ca-1) > 0$ şi este evident adevărată pentru că $a, b, c > 1$ implică ab, bc, $ca > 1$.

Problema 2. Un plan intersectează muchiile AB, BC, CD şi AD ale unui tetraedru $ABCD$ în punctele K, L, M şi respectiv N. Arătaţi că

$$\frac{AK}{AB} \cdot \frac{BL}{BC} \cdot \frac{CM}{CD} \cdot \frac{DN}{AD} \leq \frac{1}{16}.$$

Concursul KöMaL, martie 2009, problema **B. 4170.**

Soluţie:
Din teorema lui Menelaos în spaţiu (vezi Teorema 4. din materialul teoretic) rezultă că

$$\frac{BK}{AK} \cdot \frac{CL}{BL} \cdot \frac{DM}{CM} \cdot \frac{AN}{DN} = 1.$$

Atunci

$$\frac{AB}{AK} \cdot \frac{BC}{BL} \cdot \frac{CD}{CM} \cdot \frac{DA}{DN} = \left(1 + \frac{BK}{AK}\right)\left(1 + \frac{CL}{BL}\right)\left(1 + \frac{DM}{CM}\right)\left(1 + \frac{AN}{DN}\right),$$

deci este suficient să demonstrăm că dacă $a, b, c, d > 0$ satisfac $abcd = 1$, atunci $(1+a)(1+b)(1+c)(1+d) \geq 16$. Acest lucru rezultă din aplicarea inegalităţii mediilor: avem $1 + a \geq 2\sqrt{a}$ şi analoagele; înmulţind aceste inegalităţi (putem, pentru că numerele sunt pozitive), obţinem că $(1+a)(1+b)(1+c)(1+d) \geq 16\sqrt{abcd} = 16$. Egalitate avem dacă $a = b = c = d = 1$, adică dacă punctele K, L, M şi N sunt mijloacele muchiilor AB, BC, CD şi AD. (Mijloacele acestor muchii sunt într-adevăr coplanare.)

Problema 3. Pe câteva din pătrăţelele unitate ale unei table 20×20 se pun jetoane (pe un pătrăţel se poate pune cel mult un jeton). Un jeton poate fi luat de pe tablă dacă măcar jumătate din pătrăţelele de pe linia sa sunt neocupate, sau dacă măcar jumătate din pătrăţelele de pe coloana sa sunt neocupate.
Care este numărul minim (mai mare ca 0) de jetoane care pot fi puse pe tablă astfel ca niciunul din ele să nu poată fi luat?

Concursul KöMaL, noiembrie 2011, problema **B. 4392.**

Soluţie:
Să presupunem că am pus jetoane pe tablă astfel ca niciunul să nu poată fi luat. Pe tablă trebuie să rămână măcar un jeton. Pentru ca acesta să nu poată fi luat, trebuie ca pe linia sa să se găsească cel puţin 11 jetoane. Pentru ca niciunul din acestea să nu poată fi luat trebuie ca pe coloanele acestor 11 jetoane să se afle cel puţin câte 11 jetoane, deci este nevoie de cel puţin $11 \cdot 11 = 121$ de jetoane.
Pe de altă parte acest număr este şi suficient: putem, de exemplu, plasa cele 121 de jetoane în colţul 11×11 din stânga-sus al tablei şi atunci niciunul din jetoane nu poate fi luat.

Problema 4. O bucată de caşcaval în formă de paralelipiped dreptunghic are dimensiunile $10\,\text{cm} \times 13\,\text{cm} \times 14\,\text{cm}$. Se taie 10 felii din bucata de caşcaval. Fiecare felie are grosimea de 1 cm şi este tăiată paralel cu una din feţele paralelipipedului. Feliile tăiate nu sunt neapărat paralele între ele. Care este volumul maxim de caşcaval care rămâne după tăierea celor 10 felii ?

Concurs AIME (SUA), 2008

Soluţie: Fie a, b, c lungimile muchiilor paralelipipedului după tăierea celor 10 felii. Volumul căutat este atunci abc. Tăierea unei felii reduce cu 1 una din dimensiuni, astfel încât, după tăierea celor 10 felii, vom avea că $a+b+c = 10+13+14-10 = 27$. Din inegalitatea mediilor avem că $\dfrac{a+b+c}{3} = 9 \geq \sqrt[3]{abc} \Longrightarrow abc \leq 729$. Aşadar volumul maxim este $729\,\text{cm}^3$ şi se obţine atunci când bucata rămasă este un cub de latură 9 cm, adică atunci când se taie o felie perpendicular pe muchia de lungime 10 cm, patru felii perpendicular pe muchia de lungime 13 cm şi cinci felii perpendicular pe muchia de lungime 14 cm.