Problema 1. În vârfurile unui cub se scriu numerele de la 1 la 8, apoi pe fiecare din muchiile acestuia se scrie modulul diferenţei numerelor scrise în vârfurile din capetele acesteia. Care este numărul minim de numere diferite care pot fi obţinute pe muchii?

Olimpiadă Rusia

Soluţie:

Pe cele trei muchii care pleacă din vârful în care este scris numărul 8 sunt scrise trei numere diferite, deci minimul căutat este cel puţin 3.
Pe de altă parte, este uşor de construit un exemplu de cub $ABCDA'B'C'D'$ în care pe muchii figurează exact 3 numere diferite. Iată un asemenea exemplu:
$A(1)$, $B(2)$, $C(4)$, $D(3)$, $A'(5)$, $B'(6)$, $C'(8)$, $D'(7)$ unde numărul din paranteză indică numărul care se scrie în vârful respectiv. Pe muchii se obţin numerele 1, 2 şi 4.

Problema 2. Stabiliţi dacă există numere reale nenule $a_1, a_2, ..., a_{10}$ astfel incât

$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(a_{10}+\frac{1}{a_{10}}\right)=\left(a_1-\frac{1}{a_1}\right)\left(a_2-\frac{1}{a_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(a_{10}-\frac{1}{a_{10}}\right).$$

Olimpiadă Rusia

Soluţie:

Presupunem că există a_1, a_2, ..., $a_{10} \in \mathbb{R}^*$ care verifică relaţia dată. Atunci, eliminând numitorii, am avea că

$$(a_1^2+1)(a_2^2+1)\cdot\ldots\cdot(a_{10}^2+1)=(a_1^2-1)(a_2^2-1)\cdot\ldots\cdot(a_{10}^2-1). \qquad (1)$$

Dar $x^2+1>|x^2-1|$ pentru orice $x\in\mathbb{R}^*$, deci

$$(a_1^2+1)(a_2^2+1)\cdot\ldots\cdot(a_{10}^2+1)>|(a_1^2-1)(a_2^2-1)\cdot\ldots\cdot(a_{10}^2-1)|,$$

ceea ce contrazice relaţia (1).

Problema 3. Avem şase bucăţi de caşcaval având greutăţi diferite. Pentru oricare două dintre ele se poate constata, ochiometric, care dintre ele este mai grea.
Se ştie că bucăţile de caşcaval pot fi împărţite în două grupuri de câte trei având aceeaşi greutate. Cum putem determina aceste grupuri din doar două cântăriri având la dispoziţie o balanţă fără greutăţi?

Concurs Canada

Soluţie:
Putem ordona cele 6 bucăţi fără a efectua vreo cântărire: fie $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$ greutăţile celor 6 bucăţi de caşcaval. Scriind egalitatea greutăţilor bucăţilor din cele două grupuri egale vom avea una din următoarele variante:

$$x_1 + x_2 + x_6 = x_3 + x_4 + x_5 \qquad (1)$$

$$x_1 + x_3 + x_6 = x_2 + x_4 + x_5 \qquad (2)$$

$$x_1 + x_4 + x_5 = x_2 + x_3 + x_6 \qquad (3)$$

$$x_1 + x_4 + x_6 = x_2 + x_3 + x_5 \qquad (4)$$

$$x_1 + x_5 + x_6 = x_2 + x_3 + x_4. \qquad (5)$$

Pentru a vedea care variantă este cea corectă comparăm mai întâi, folosind balanţa, sumele $x_1 + x_4 + x_6$ şi $x_2 + x_3 + x_5$. Dacă ele sunt egale, am găsit cele două grupuri căutate.
Dacă $x_1 + x_4 + x_6 < x_2 + x_3 + x_5$ atunci nu putem avea egalitate nici în variantele (1), (2) şi (3) primul grup fiind mai uşor decât al doilea. În acest caz, rezultă că avem egalitate în varianta (5).
Dacă $x_1 + x_4 + x_6 > x_2 + x_3 + x_5$ atunci nu putem avea egalitate nici în varianta (5). Comparăm acum, printr-o a doua cântărire, grupurile $x_1 + x_3 + x_6$ şi $x_2 + x_4 + x_5$. Dacă ele sunt egale, atunci am terminat.
Dacă $x_1 + x_3 + x_6 < x_2 + x_4 + x_5$ atunci nu putem avea egalitate nici în varianta (1), deci trebuie să avem egalitate în varianta (3).
Dacă $x_1 + x_3 + x_6 > x_2 + x_4 + x_5$ atunci avem şi $x_1 + x_4 + x_5 < x_2 + x_3 + x_6$, deci trebuie să avem egalitate în varianta (1).

Problema 4. Determinaţi valorile numărului natural n pentru care putem pava o podea $n \times n$ folosind un număr egal de dale pătrate 2×2 şi 1×1.

Andrei Eckstein

Soluţie:
Presupunând că o podea $n \times n$ poate fi pavată folosind k dale 2×2 şi k dale

1×1, din motive de arie trebuie să avem $n^2 = k \cdot 2^2 + k \cdot 1^2 = 5k$, deci $5 \mid n$. Vom arăta că dacă $5 \mid n$ şi $n \neq 5$ atunci podeaua $n \times n$ poate fi pavată respectând cerinţele din enunţ. De asemenea, vom arăta că un pătrat 5×5 nu poate fi pavat.

Observăm mai întâi că un dreptunghi 5×2 poate fi pavat uşor cu două dale 2×2 şi două dale 1×1. Folosind astfel de dreptunghiuri, putem pava orice dreptunghi $(5j) \times (2k)$ folosind un număr egal de dale 2×2 şi 1×1. În particular, putem pava orice podea $(10\ell) \times (10\ell)$.

O a doua observaţie importantă este că putem pava un dreptunghi 15×7 respectând condiţiile din enunţ. Vom pava „colţul" 14×6 din dreapta-sus cu $7 \cdot 3 = 21$ dale 2×2; restul de 21 de pătrate (marginea din stânga şi cea de jos a dreptunghiului 15×7) le pavăm cu dale 1×1.

Lipind lângă dreptunghiul 15×7 un dreptunghi 15×8, obţinem o pavare pentru pătratul 15×15. (Am văzut că putem pava „regulamentar" orice dreptunghi în care o dimensiune este multiplu de 5 şi cealaltă este pară.)

Pentru a pava podeaua $(10i + 15) \times (10i + 15)$, $i \in \mathbb{N}^*$, vom lipi mai întâi lângă pătratul 15×15 un dreptunghi $15 \times (10i)$ (care se poate pava pentru că $5 \mid 15$ şi $10i$ este par). Obţinem un dreptunghi $15 \times (10i + 15)$ care se poate pava. Lângă acesta lipim un dreptunghi $(10i) \times (10i + 15)$ (care poate şi el fi pavat) obţinând o pavare pentru pătratul $(10i + 15) \times (10i + 15)$.

Am arătat aşadar că orice pătrat de dimensiune multiplu de 5, mai mare decât 5, poate fi pavat.

Pătratul 5×5 nu poate fi pavat. Dacă ar putea fi pavat, ar trebui pavat cu câte 5 dale din fiecare tip. Colorăm pătrăţelele unitate ale pătratului 5×5 pe benzi verticale: alb-negru-alb-negru-alb. Atunci vom avea 15 pătrăţele albe şi 10 negre. O dală 2×2 acoperă, indiferent de poziţia în care e plasată, câte două pătrăţele din fiecare culoare. Rezultă că ele trebuie să acopere cele 10 pătrăţele negre, ceea ce nu se poate.