Problema 1. Să se determine numere strict pozitive a şi b cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$a^n + b^n = a^{n+1} + b^{n+1} = a^{n+2} + b^{n+2}.$$

Mihail Mogoşanu, RMT nr. 2/1986

Soluţia 1: Fie a şi b numere strict pozitive cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^n + b^n = a^{n+1} + b^{n+1} = a^{n+2} + b^{n+2} \overset{\text{not}}{=} x$.
Atunci, pe de o parte, $a^{n+2} - 2a^{n+1} + a^n + b^{n+2} - 2b^{n+1} + b^n = (a^{n+2} + b^{n+2}) - 2(a^{n+1} + b^{n+1}) + (a^n + b^n) = x - 2x + x = 0$, pe de altă parte $a^{n+2} - 2a^{n+1} + a^n + b^{n+2} - 2b^{n+1} + b^n = a^n(a-1)^2 + b^n(b-1)^2$. Pentru ca $a^n(a-1)^2 + b^n(b-1)^2 = 0$, deoarece termenii sumei sunt nenegativi, rezultă că $a^n(a-1)^2 = b^n(b-1)^2 = 0$, de unde $a = b = 1$, numere care satisfac într-adevăr relaţia din enunţ.

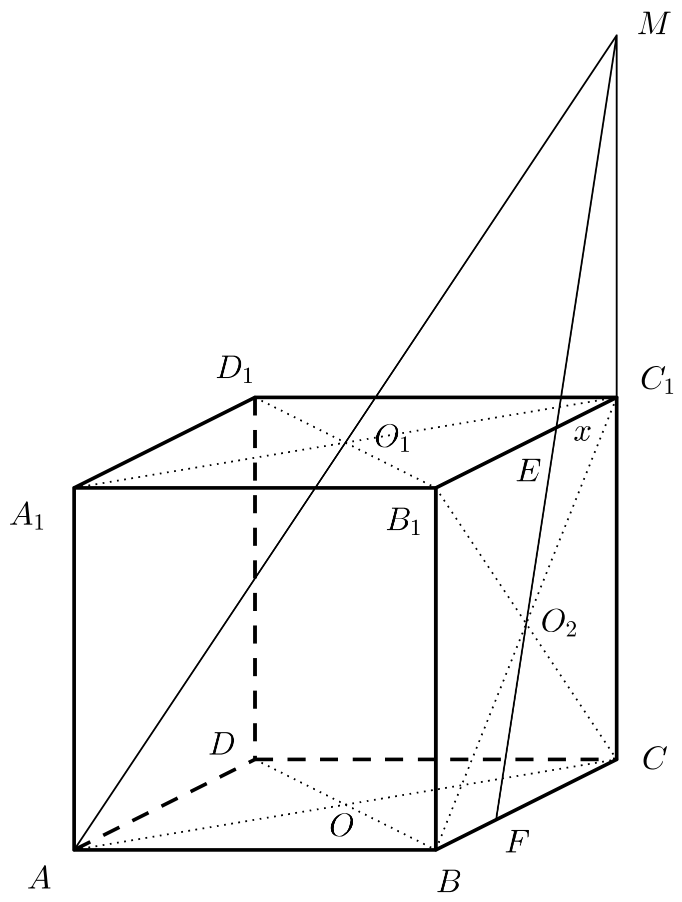
Soluţia 2: Cum $a^{n+2} + b^{n+2} = (a+b)(a^{n+1} + b^{n+1}) - ab(a^n + b^n)$, folosind condiţia din enunţ, rezultă $1 = a + b - ab$, adică $(a-1)(b-1) = 0$. Obţinem că $a = 1$ sau $b = 1$, de unde, cu relaţiile din enunţ, $a = b = 1$, care verifică într-adevăr condiţiile date.

Soluţia 3. Din prima egalitate obţinem $a^n(1-a) = b^n(b-1)$, iar din cea de-a doua $a^{n+1}(1-a) = b^{n+1}(b-1)$. Observăm că dacă $a = 1$ atunci $b = 1$ şi invers. În plus, $a = b = 1$ satisfac relaţiile date. Dacă $a \neq 1$ şi $b \neq 1$ rezultă $\frac{a^{n+1}(1-a)}{a^n(1-a)} = \frac{b^{n+1}(b-1)}{b^n(b-1)}$, adică $a = b$. Revenind la relaţiile din enunţ, acestea devin $2a^n = 2a^{n+1} = 2a^{n+2}$ care nu pot fi satisfăcute de niciun $a > 0$, $a \neq 1$.
Prin urmare singura soluţie este $a = b = 1$.

Problema 2. Se consideră un cub $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Planul determinat de A şi de centrele pătratelor $A_1B_1C_1D_1$ şi B_1C_1CB intersectează $[B_1C_1]$ în E. Calculaţi $\frac{B_1E}{C_1E}$.

Olimpiada judeţeană, 1987 (clasa a X-a)

Soluţie:
Notăm cu O, O_1, O_2 respectiv centrele feţelor $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, BCC_1B_1 şi $AO_1 \cap CC_1 = \{M\}$. Rezultă astfel că $MO_2 = (AO_1O_2) \cap (BCC_1)$. Deducem că $\{E\} = MO_2 \cap B_1C_1$. Notăm $\{F\} = MO_2 \cap BC$ şi avem $\frac{O_1C_1}{AC} = \frac{1}{2} = \frac{MC_1}{MC} = \frac{EC_1}{FC}$.
Totodată avem şi $\Delta\, EO_2C_1 \equiv \Delta\, FO_2B$ şi $\Delta\, EO_2B_1 \equiv \Delta\, FO_2C$. Notând $EC_1 = x$, rezultă $FC = 2x$, de unde $EB_1 = 2x$ şi astfel $\frac{B_1E}{C_1E} = 2$.



Problema 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia

$$2^x + 3^y = z^2.$$

Olimpiadă Marea Britanie, 1996

Soluţie:

• Dacă $x = 0$, ecuaţia revine la $3^y = (z-1)(z+1)$. Deoarece $z-1$ şi $z+1$ nu pot fi ambele divizibile cu 3, rezultă că $z - 1 = 1$, adică $z = 2$. Se obţine soluţia $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$.

• Dacă $x = 1$, ecuaţia devine $2 + 3^y = z^2$. Dacă $y = 0$, atunci $z^2 = 3$, imposibil. Dacă $y > 0$, $z^2 = 3^y + 2 = M3 + 2$, dar un pătrat perfect nu este de forma $M3 + 2$.

• Dacă $x \geq 2$, atunci $2^x = M4$, iar 3^y este impar, deci z este impar. Atunci $z^2 = M4+1$. Rezultă că şi $3^y = M4+1$. Dar $3^y = (4-1)^y \equiv (-1)^y \pmod 4$, de unde y este par. Fie $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $y = 2k$. Atunci $2^x = z^2 - (3^k)^2 = (z-3^k)(z+3^k)$. Deducem că $z-3^k = 2^u$ şi $z+3^k = 2^v$, cu $u, v \in \mathbb{N}$, $u+v = x$. Atunci $2^v - 2^u = 2\cdot 3^k$. De aici rezultă că membrul stâng este par, dar nu este divizibil cu 4, deci $u = 1$.

Obţinem atunci că $3^k = 2^{v-1} - 1$. Dacă $k = 0$, atunci $v = 2$ şi obţinem soluţia $x = 3$, $y = 0$, $z = 3$. Dacă $k > 0$, atunci $3^k = M3$, deci trebuie ca $2^{v-1} = M3 + 1$. Cum $2^{v-1} = (3-1)^{v-1} \equiv (-1)^{v-1} \pmod 3$, rezultă că $v - 1$ este par. Fie $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $v - 1 = 2m$. Atunci $3^k = (2^m - 1)(2^m + 1)$. Deoarece $2^m - 1$ şi $2^m + 1$ nu pot fi simultan multipli de 3, rezultă că $2^m - 1 = 1$, deci $m = 1$. Se obţine soluţia $x = 4$, $y = 2$, $z = 5$.
În concluzie, ecuaţia are trei soluţii: $(x, y, z) = (0, 1, 2)$, $(x, y, z) = (3, 0, 3)$ şi $(x, y, z) = (4, 2, 5)$.

Problema 4. Câte perechi ordonate de mulţimi (A, B) au proprietăţile $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B \subseteq \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ şi $\operatorname{card}(A \cap B) = 3$?

Concursul Purple Comet, 2011

Soluţie: Deoarece $A \cap B \subset \{2, 3, 4, 5, 6\}$, mulţimea $A \cap B$ poate fi aleasă în 10 moduri[1]; $A \cap B$ poate fi: $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{2, 5, 6\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{3, 4, 6\}$, $\{3, 5, 6\}$ sau $\{4, 5, 6\}$.
Să stabilim acum soarta elementelor 1, 7 şi 8.
1 poate să aparţină lui A sau nu (2 variante), 7 şi 8 pot aparţine, sau nu, lui B (câte 2 variante).

În fine, pentru cele două elemente ale mulţimii $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ care nu sunt în $A \cap B$, sunt câte 3 variante: fiecare din cele două numere poate fie să aparţină numai lui A, fie să aparţină numai lui B, fie să nu aparţină niciuneia din mulţimile A şi B.
În concluzie, sunt $10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 720$ de variante.
(Alegerile făcute mai sus fiind independente, s-a putut folosi *regula produsului.*)

[1] pentru cine ştie combinări, putem alege 3 elemente din cele 5 ale mulţimii $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ în $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$ moduri.