Problema 1. Fie a, b, c, d numere reale cu proprietatea că $a + d = b + c$. Demonstraţi că

$$(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) \geq 0.$$

Când are loc egalitatea?

Olimpiadă Cehia şi Slovacia, 2004

Soluţia 1: Înlocuind $d = b + c - a$, avem că $(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b+c-2a)(b-c) = 2a^2 + 2b^2 - 4ab = 2(a-b)^2 \geq 0$. Egalitate avem dacă $a = b$, ceea ce implică şi $c = d$.

Soluţia 2: Desfăcând parantezele şi reducând termenii asemenea, inegalitatea revine la $2(ac + bd - bc - ad) \geq 0$, adică $2(a-b)(c-d) \geq 0$. Ţinând seama de condiţia $a + d = b + c$, avem $a - b = c - d$, deci inegalitatea de demonstrat este $2(a-b)^2 \geq 0$, care este evidentă. Egalitate avem dacă $a - b = c - d = 0$, adică $a = b$, $c = d$.

Observaţii: 1. De fapt, din soluţia a doua se vede că este suficient ca $(a-b)(c-d) \geq 0$, nu trebuie ca $a - b = c - d$.
2. Inegalitatea din enunţ este un caz particular al inegalităţii lui Ptolemeu:

$$|a-b| \cdot |c-d| + |a-c| \cdot |b-d| \geq |a-d| \cdot |b-c|,$$

pentru orice numere reale[1] a, b, c, d.
Egalitatea are loc dacă exact unul dintre numerele a şi d este între numerele b şi c.

Problema 2. Demonstraţi că în orice tetraedru există cel puţin un vârf pentru care cu muchiile care au un capăt în respectivul vârf se poate forma un triunghi.

din cartea *Problems in solid geometry*, de V.V. Prasolov şi I.F. Sharygin

Soluţie: Fie $ABCD$ un tetraedru arbitrar. Putem presupune că lungimea muchiei AB este mai mare sau egală decât cea a celorlalte muchii.
Presupunând că nu putem forma un triunghi nici cu muchiile care pleacă din A, nici cu muchiile care pleacă din B, avem $AB \geq AC + AD$ şi $BA \geq BC + BD$, deci, prin adunare, $2AB \geq (AC + AD) + (BC + BD) = (AC + BC) + (AD + BD) > AB + AB = 2AB$, din inegalitatea triughiului aplicată în triunghirile ABC şi ABD. Ultima relaţie obţinută reprezintă o contradicţie; prin urmare fie cu muchiile care pleacă din A, fie cu cele care pleacă din B se poate forma un triunghi.

Comentariu: Este posibil ca tetraedrul să aibă un singur vârf cu proprietatea dorită (de exemplu o piramidă triunghiulară regulată care are înălţimea mult mai mare decât lungimea laturii bazei). Tetraedrul poate avea două asemenea vârfuri (daţi

[1] şi, veţi vedea în clasa a X-a, chiar complexe

un exemplu!), trei asemenea vârfuri (daţi un exemplu!) sau, în mod evident, 4 asemenea vârfuri (de exemplu tetraedrul regulat).

Problema 3. Fie a, b, c numere reale cu $a, b, c > 0$ şi $a + b + c = 3$. Să se arate că

$$(a+b)^2a + (b+c)^2b + (c+a)^2c \geq \frac{36abc}{a^2+b^2+c^2}.$$

Alexandru Mihalcu, elev, Bucureşti

Soluţia 1: Avem, succesiv,

$$(a+b)^2a+(b+c)^2b+(c+a)^2c = \frac{(a+b)^2}{\frac{1}{a}} + \frac{(b+c)^2}{\frac{1}{b}} + \frac{(c+a)^2}{\frac{1}{c}} \overset{(*)}{\geq} \frac{4(a+b+c)^2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} =$$

$$\frac{36}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{36}{\frac{ab+bc+ca}{abc}} = \frac{36abc}{ab+bc+ca} \overset{(**)}{\geq} \frac{36abc}{a^2+b^2+c^2}.$$

La inegalitatea $(*)$ s-a folosit *inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz* sub forma prezentată în materialul teoretic, iar la $(**)$ s-a folosit cunoscuta inegalitate $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ (echivalentă cu $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$).

Cazul de egalitate are loc dacă avem egalitate atât în $(*)$ cât şi în $(**)$, adică atunci când sunt satisfăcute relaţiile $\frac{a+b}{\frac{1}{a}} = \frac{b+c}{\frac{1}{b}} = \frac{c+a}{\frac{1}{c}}$ (cazul de egalitate pentru $(*)$), $a = b = c$ (cazul de egalitate pentru $(**)$) şi $a + b + c = 3$, relaţii satisfăcute dacă şi numai dacă $a = b = c = 1$.

Soluţia 2: Împărţind-o cu $abc > 0$, inegalitatea de demonstrat se rescrie echivalent

$$\frac{(a+b)^2}{bc} + \frac{(b+c)^2}{ca} + \frac{(c+a)^2}{ab} \geq \frac{36}{a^2+b^2+c^2}.$$

Dar, din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz, avem că $\frac{(a+b)^2}{bc} + \frac{(b+c)^2}{ca} + \frac{(c+a)^2}{ab} \geq \frac{((a+b)+(b+c)+(c+a))^2}{bc+ca+ab} = \frac{36}{ab+bc+ca} \geq \frac{36}{a^2+b^2+c^2}$.

Din nou se vede uşor că egalitatea se realizează dacă şi numai dacă $a = b = c = 1$.

Problema 4. Pe un cerc sunt scrise 2014 numere, doi de 1 şi 2012 de 0. Se poate efectua următoarea operaţie: se alege un număr şi i se schimbă cei doi vecini din 0 în 1 şi invers. Făcând astfel de operaţii, putem să obţinem 2014 de 1 pe cerc?

Andrei Eckstein, prelucrare după o problemă dată la Olimpiada Rio Plata, 1997

Soluţie: Răspunsul depinde de poziţia celor două cifre de 1 de pe cerc. Dacă colorăm cele 2014 numere, alternativ, în alb şi negru, răspunsul este că dacă cele două cifre de 1 au aceeaşi culoare atunci nu putem face ca toate numerele de pe cerc să devină 1, în vreme ce în cazul în care cele două cifre de 1 au culori diferite, putem ajunge la configuraţia finală dorită.

Dacă 1-urile au aceeaşi culoare: să observăm că paritatea numărului de 1-uri negre este invariant la o operaţie. Orice operaţie vizează fie două numere negre fie două numere albe. Dacă ea vizează numere negre, numărul de 1-uri negre poate să crească cu 2 (dacă se schimbă două 0-uri negre în 1-uri), să scadă cu 2 (dacă se schimbă două 1-uri negre în 0-uri) sau să rămână neschimbat dacă se schimbă un 0 şi un 1 într-un 1 şi respectiv un 0. Dacă iniţial 1-urile au aceeaşi culoare, atunci avem fie zero fie două 1-uri negre, oricum un număr par. Prin urmare numărul de 1-uri negre de pe cerc va fi mereu par. La final, ar trebui să avem numai 1-uri, în particular 1007 1-uri negre, adică un număr impar. Acest lucru nu este posibil, deci nu putem ajunge la respectiva configuraţie.

Dacă 1-urile au culori diferite: să observăm că putem face cei doi de 1 să fie vecini. Într-adevăr, dacă iniţial ei nu sunt vecini, putem alege un 0 vecin cu un 1 şi face operaţia. Efectul este că 1-le se va ,,muta" în poziţia simetrică faţă de 0-ul ales. Repetând această manevră, putem face ca cei doi de 1 să devină vecini. Celelalte 2012 numere le grupăm acum câte 4. În fiecare din cele 503 grupe, alegem, pe rând, cele două cifre din mijloc şi facem operaţia. Cele două operaţii vor transforma grupa de patru 0-uri în patru de 1. Procedând astfel pentru fiecare grupă, vom transforma toate numerele de pe cerc în 1-uri.

Remarcă: Enunţul problemei originale date la Olimpiada Rio Plata:

Pe un cerc sunt scrise 1996 de 0 şi un 1. Singura operaţie permisă e să alegem un număr şi să-i schimbăm vecinii din 0 în 1 şi invers. Făcând astfel de operaţii, putem preschimba toate numerele de pe cerc în 1-uri? Dar dacă am fi pornit cu 1997 de 0 pe cerc?

Soluţie: Răspunsul este că dacă pornim cu 1996 de zerouri, putem ajunge să avem numai 1-uri, în vreme ce dacă pornim cu 1997 zerouri, nu putem.
Cu 1996 zerouri, le putem grupa în 499 grupe de câte 4, apoi facem operaţia alegând al doilea şi al treilea 0 din fiecare grup.
Cu 1997 zerouri, să observăm că numărul de cifre de 0 existente pe cerc nu-şi schimbă paritatea. Iniţial avem un număr impar de zerouri, 1997, deci nu putem ajunge la configuraţia în care să avem 0 zerouri (adică un număr par).