Problema 1. Fie x, y, z numere naturale nenule care satisfac relaţia $2xy^2 = 3z^3$. Care este valoarea minimă a produsului xyz?

Concurs ,,Arany Dániel", Ungaria

Soluţie:
Observăm că z trebuie să fie număr par. Atunci $8 \mid 3z^3$, deci $4 \mid xy^2$, de unde $2 \mid x$ sau $2 \mid y$. Pe de altă parte, din $3 \mid 2xy^2$ rezultă $3 \mid x$ sau $3 \mid y$. Prin urmare $12 \mid xyz$.
Valoarea minimă a produsului este, prin urmare, cel puţin 12.
Deoarece numerele $x = 3$, $y = 2$, $z = 2$ verifică relaţia dată şi au produsul $xyz = 12$, rezultă că minimul căutat este 12.

Problema 2. a) Este inegalitatea $PA + PB < CA + CB$ adevărată pentru orice triunghi ABC şi orice punct P din interiorul acestuia?
b) Este inegalitatea $PA + PB + PC < DA + DB + DC$ adevărată pentru orice tetraedru $ABCD$ şi orice punct P din interiorul acestuia?

Concursul KöMaL, Ungaria, ianuarie 2011

Soluţie:
a) Inegalitatea este adevărată. Fie $\{Q\} = AP \cap BC$. Folosind inegalitatea triunghiului, avem $PA+PB < PA+(PQ+QB) = AQ+QB < (AC+CQ)+QB = AC + CB$.
b) Inegalitatea nu este adevărată în orice tetraedru. Se pot descrie numeroase exemple.
1. De exemplu, alegând ABC un triunghi dreptunghic isoscel, cu $m(\angle A) = 90°$ şi $AB = AC = 100$, iar D astfel ca $DA \perp (ABC)$, $DA = 1$, atunci $DA + DB + DC = 1 + 2\sqrt{10001} \approx 201$. Alegând punctul P foarte aproape de B, vom avea $PA + PB + PC \approx BA + BC = 100 + 100\sqrt{2} \approx 241 > 201$.
2. Vom da şi un exemplu riguros: considerăm o piramidă regulată cu baza BCD de latură 3 şi muchie laterală de lungime 100. Atunci $DA + DB + DC = 106$. Fie O centrul bazei. Atunci $BO = \sqrt{3}$. Înălţimea piramidei este $AO = \sqrt{9997} > 99$. Alegem $P \in (AO)$ astfel încât $PO = 99$. Atunci $PB = PC = \sqrt{3 + 99^2} = \sqrt{9804}$, deci $PA + PB + PC = 2\sqrt{9804} + \sqrt{9997} - 99 > 2 \cdot 99 + 99 - 99 = 198 > 106$.

Problema 3. Stabiliţi dacă există 2015 puncte în plan astfel încât:
• distanţa dintre oricare două din aceste puncte să fie diferită de 1 şi
• fiecare din cercurile de rază 1 având centrul într-unul din aceste puncte să lase exact 1007 dintre puncte în exteriorul cercului.

* * *

Soluţie:
Răspunsul este negativ: nu există 2015 puncte cu proprietăţile date.

Dacă ar exista, atunci pentru fiecare vârf ar exista 1007 segmente de lungime mai mică decât 1 cu unul dintre capete în respectivul punct. În total ar fi atunci $2015 \cdot 1007$ segmente de lungime mai mică decât 1, însă fiecare segment este numărat de două ori în acest total, câte o dată pentru fiecare capăt. Aşadar ar trebui să existe $\frac{2015 \cdot 1007}{2} \notin \mathbb{N}$ asemenea segmente, ceea ce reprezintă o contradicţie.

Problema 4. Arătaţi că dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$ şi $a + b + c + d = 1$, atunci

$$\frac{a}{b+cd} + \frac{b}{c+da} + \frac{c}{d+ab} + \frac{d}{a+bc} \geq \frac{16}{5}.$$

Vasile Peiţa

Soluţie:

$$\frac{a}{b+cd} + \frac{b}{c+da} + \frac{c}{d+ab} + \frac{d}{a+bc} = \frac{a^2}{ab+cda} + \frac{b^2}{bc+dab} + \frac{c^2}{cd+abc} + \frac{d^2}{da+bcd} \overset{CBS}{\geq}$$

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{(ab+bc+cd+da)+(abc+bcd+cda+dab)}. \qquad (1)$$

Vom demonstra mai jos inegalităţile

$$ab + bc + cd + da \leq \frac{1}{4} \qquad (2)$$

şi

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{16}. \qquad (3)$$

Înlocuind în (1), vom obţine $\frac{a}{b+cd} + \frac{b}{c+da} + \frac{c}{d+ab} + \frac{d}{a+bc} \geq \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}} = \frac{16}{5}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Să revenim la demonstrarea inegalităţilor (2) şi (3):

Avem $ab+bc+cd+da = (a+c)(b+d) \overset{\text{medii}}{\leq} \left(\frac{(a+c)+(b+d)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, cu egalitate dacă $a + c = b + d = \frac{1}{2}$.

Pe de altă parte, $abc+bcd+cda+dab = bc(a+d)+ad(b+c) \overset{\text{medii}}{\leq} \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 (a+d) + \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 (b+c) = \frac{1}{4}(b+c)(a+d)(a+b+c+d) \overset{\text{medii}}{\leq} \frac{1}{4}\left(\frac{(b+c)+(a+d)}{2}\right)^2 (a+b+c+d) = \frac{1}{16}$, cu egalitate dacă $a = d, b = c$ şi $b + c = a + d = \frac{1}{2}$, adică pentru

$a = b = c = d = \dfrac{1}{4}$.

În concluzie, inegalitatea din enunţ este demonstrată.

Egalitate avem dacă $a = b = c = d = \dfrac{1}{4}$.