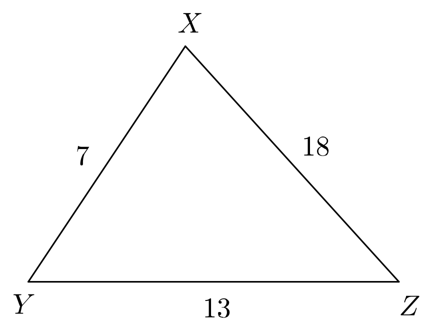
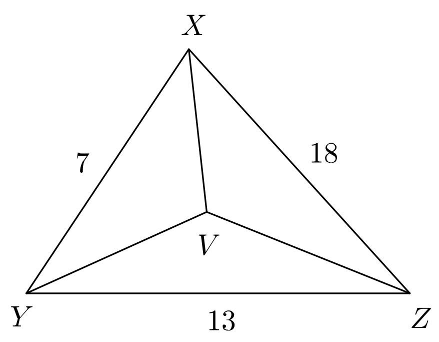
**Problema 1.** Cele şase muchii ale unui tetraedru $ABCD$ au lungimile 7, 13, 18, 27, 36 şi 41. Dacă $AB = 41$, cât este $CD$?

*Concurs AHSME, SUA, 1988*

**Soluţia 1:**
Vom folosi faptul că într-un triunghi suma lungimilor oricăror două laturi este mai mare decât lungimea celei de-a treia.
Deoarece $7 + 13 \leq 27$ şi $7 + 18 \leq 27$, muchiile de lungime 7, 13 şi 18 trebuie să formeze un triunghi, $XYZ$, cu $XY = 7$, $YZ = 13$, $ZX = 18$. Într-adevăr, dacă una din muchiile de lungime 13 sau 18 ar fi muchia opusă celei de lungime 7, cealaltă va fi o muchie alăturată muchiei de lungime 7 şi nu va exista nicio muchie care să închidă triunghiul. Prin urmare muchia de lungime 13 trebuie să fie adiacentă celei de lungime 7 şi singura muchie care poate închide triunghiul este cea de lungime 18.

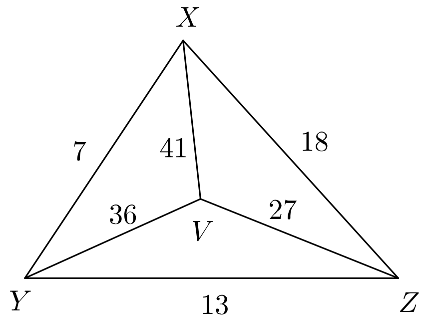



Atunci muchiile de lungimi 27, 36 şi 41 au un vârf comun, $V$. Deoarece numai 41 şi 36 au diferenţa mai mică decât 7, deducem că $VX$ şi $VY$ sunt 36 şi 41. Rezultă $VZ = 27$. O reprezentare schematică a configuraţiei poate fi văzută în figura de mai jos.



Dacă $VX = 36$, $VY = 41$ atunci în triunghiul $VYZ$ am avea $YZ+VZ = 13+27 = 40 < 41 = VY$, contradicţie.
Singura posibilitate este $VX = 41$, $VY = 36$. Se verifică uşor că această configuraţie este într-adevăr posibilă. Prin urmare, muchia opusă muchiei $XV = AB = 41$ este muchia $CD = YZ = 13$.

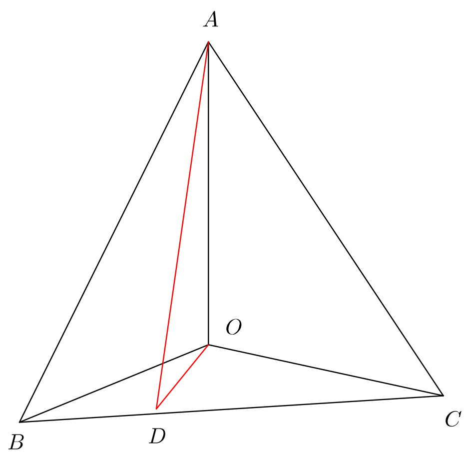
Singura configuraţie posibilă este aşadar:




**Soluţia 2:** Distingem două cazuri:
Cazul I: muchiile de lungimi 41 şi 7 sunt opuse.
În acest caz muchiile de lungimi 7 şi 36 sunt alăturate, iar cea de-a treia muchie a triunghiului determinat de ele trebuie să aibă lungimea mai mare decât $36-7 = 29$, ceea ce nu se poate deoarece am presupus că muchia de lungime 41, singura care are lungimea convenabilă, nu este adiacentă muchiei de lungime 7. Prin urmare acest caz nu este posibil.
Cazul II: muchiile de lungimi 41 şi 7 sunt adiacente.
Cea de-a treia muchie a triunghiului care are muchiile 41 şi 7 trebuie să aibă lungimea mai mare ca $41 - 7 = 34$, deci trebuie să fie 36. Au rămas ,,nefolosite" muchiile de lungimi 13, 18 şi 27. Două dintre aceste muchii determină cu muchia de lungime 41 un triunghi, deci suma lungimilor lor este mai mare ca 41. Deducem că cele două muchii au lungimile 18 şi 27, prin urmare muchia opusă lui $AB = 41$ este $CD = 13$. Configuraţia este într-adevăr posibilă după cum o arată figura a treia din cadrul soluţiei 1.

**Problema 2.** Pe trei semidrepte cu originea comună în $O$ se consideră, respectiv, punctele $A, B$ şi $C$. Ştiind că $OA \perp OB$, $OA \perp OC$ şi că $S^2_{ABC} = S^2_{OAB} + S^2_{OBC} + S^2_{OCA}$, să se stabilească dacă $OB \perp AC$.

*Olimpiada judeţeană, Cluj,* 1986




**Soluţie:**
Notăm lungimile $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Pentru triunghiurile dreptunghice $OAB$ şi $OAC$ avem $S_{OAB} = \dfrac{ab}{2}$, $S_{OCA} = \dfrac{ac}{2}$. Exprimăm şi ariile triunghiurilor $OBC$ şi $ABC$. Ducem $OD \perp BC$, $D \in BC$. Din $OA \perp OB$ şi $OA \perp OC$ rezultă $OA \perp (OBC)$, de unde, cu teorema celor trei perpendiculare, rezultă $AD \perp BC$. Atunci $S_{OBC} = \dfrac{BC \cdot OD}{2}$ şi $S_{ABC} = \dfrac{BC \cdot AD}{2}$. Astfel relaţia din ipoteză devine $\dfrac{BC^2 \cdot AD^2}{4} = \dfrac{BC^2 \cdot OD^2}{4} + \dfrac{a^2b^2}{4} + \dfrac{a^2c^2}{4}$, adică $BC^2(AD^2 - OD^2) = a^2(b^2 + c^2)$. Cum $OA \perp (OBC)$ şi $OD \subset (ABC)$, rezultă $OA \perp OD$, deci, conform teoremei lui Pitagora, $AD^2 = OD^2 + OA^2$. Înlocuind în relaţia de mai sus, obţinem că $BC^2 \cdot a^2 = a^2(b^2 + c^2)$, de unde $BC^2 = OB^2 + OC^2$. Conform reciprocei teoremei lui Pitagora rezultă atunci că $OB \perp OC$. Cum $OB \perp OA$, rezultă $OB \perp (OAC)$, deci $OB \perp AC$.

**Problema 3.** Arătaţi că dacă $a, b, c \in (1, 4)$, atunci

$$\frac{c^2 + a^2}{2a + 2b - c} + \frac{a^2 + 2b^2}{2c + 2a - b} + \frac{b^2 + 3c^2}{2b + 2c - a} \geq \frac{2a + 3b + 4c}{3}.$$

*Andrei Eckstein*

**Soluţie:**
Vom scrie membrul stâng ca o sumă de 9 termeni pentru care vom aplica inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz, sub forma numită uneori inegalitatea lui Bergström, alteori inegalitatea lui Titu Andreescu (vezi materialul de la etapa a IV-a):

$$\frac{c^2 + a^2}{2a + 2b - c} + \frac{a^2 + 2b^2}{2c + 2a - b} + \frac{b^2 + 3c^2}{2b + 2c - a} =$$

$$\frac{c^2}{2a+2b-c}+\frac{a^2}{2a+2b-c}+\frac{a^2}{2c+2a-b}+\frac{b^2}{2c+2a-b}+\frac{b^2}{2c+2a-b}+$$
$$\frac{b^2}{2b+2c-a}+\frac{c^2}{2b+2c-a}+\frac{c^2}{2b+2c-a}+\frac{c^2}{2b+2c-a}\geq$$
$$\frac{(2a+3b+4c)^2}{4a+4b-2c+6c+6a-3b+8b+8c-4a}=\frac{(2a+3b+4c)^2}{6a+9b+12c}=\frac{2a+3b+4c}{3}.$$

Mai rămâne să justificăm că putem aplica inegalitatea citată, adică faptul că numitorii celor 9 fracţii sunt pozitivi. Avest lucru este evident deoarece, de exemplu, $2a+2b>2\cdot 1+2\cdot 1=4>c$.

**Observaţie.** Egalitate în inegalitatea de mai sus avem atunci când
$$\frac{c}{2a+2b-c}=\frac{a}{2a+2b-c}=\frac{a}{2c+2a-b}=\frac{b}{2c+2a-b}=\frac{b}{2c+2a-b}=$$
$$\frac{b}{2b+2c-a}=\frac{c}{2b+2c-a}=\frac{c}{2b+2c-a}=\frac{c}{2b+2c-a}.$$
Comparând fracţiile care au numitori egali, vedem că această condiţie revine la $a=b=c$.

**Problema 4.** Determinaţi numerele naturale nenule $n$ pentru care există $x,y\in\mathbb{N}^*$ astfel încât
$$x^2+y^2=2013^n.$$

*Lucian Dragomir*

**Soluţie:** Vom arăta că mulţimea numerelor naturale $n$ cu proprietatea din enunţ este mulţimea numerelor naturale nenule pare.
Pe de o parte, pentru $n=2k$, $k\in\mathbb{N}^*$, avem $2013^n=2013^{2k}=3^{2k}\cdot 11^{2k}\cdot 61^{2k}=3^{2k}\cdot 11^{2k}\cdot 61^{2k-2}(60^2+11^2)=(3^k\cdot 11^k\cdot 61^{k-1}\cdot 60)^2+(3^k\cdot 11^k\cdot 61^{k-1}\cdot 11)^2$, deci alegând $x=3^k\cdot 11^k\cdot 61^{k-1}\cdot 60$ şi $y=3^k\cdot 11^k\cdot 61^{k-1}\cdot 11$ avem $x^2+y^2=2013^{2k}$, deci orice număr natural nenul par are proprietatea din enunţ.
Pe de altă parte, dacă $x=3^ax_1$ cu $a$, $x_1\in\mathbb{N}$, $(x_1,3)=1$, şi $y=3^by_1$ cu $b$, $y_1\in\mathbb{N}$, $(y_1,3)=1$, atunci:
• dacă $a<b$, $x^2+y^2=3^{2a}(x_1^2+3^{2b-2a}y_1^2)=3^{2a}(M3+1)$, iar $2013^n=3^n\cdot 11^n\cdot 61^n$, deci $n=2a$, adică par;
• dacă $a=b$ $x^2+y^2=3^{2a}(x_1^2+y_1^2)=3^{2a}(M3+1+M3+1)$, iar $2013^n=3^n\cdot 11^n\cdot 61^n$, deci $n=2a$, adică par;
• dacă $a>b$, $x^2+y^2=3^{2b}(3^{2a-2b}x_1^2+y_1^2)=3^{2b}(M3+1)$, iar $2013^n=3^n\cdot 11^n\cdot 61^n$, deci $n=2b$, adică par.
Prin urmare, $n$ trebuie să fie par, ceea ce încheie demonstraţia.

**Observaţie.** Se putea folosi faptul că dacă o sumă de pătrate este divizibilă cu $p=3$ atunci fiecare pătrat este divizibil cu $p=3$. (Acest rezultat este valabil

pentru orice număr prim $p$ de forma $M4+3$.)
Cum $2013^n$ este divizibil cu 3, trebuie ca $x$ şi $y$ să fie divizibili cu 3. Dacă $x=3x_1$, $y=3x_2$, rezultă că $x^2+y^2$ este divizibil cu 9, deci $n \geq 2$. Dacă $n \geq 3$ atunci se reia raţionamentul de la început pentru numerele $x_1$ şi $y_1$:
din $x_1^2+y_1^2=3^{n-2}\cdot 671^n$ va rezulta că $x_1$, $y_1$ sunt divizibili cu 3, deci $n \geq 4$ şi aşa mai departe până când $3^{n-2k}\cdot 671^n$ nu va mai fi divizibil cu 3, lucru care se întâmplă numai pentru $n$ par.