Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia

$$(m+n^2)(m^2+n)=(m+n)^3.$$

Olimpiadă Irlanda, 2003

Soluţie:
Ecuaţia se scrie echivalent $m^3+mn+n^2m^2+n^3=m^3+3m^2n+3mn^2+n^3$, adică $mn(mn-3m-3n+1)=0$. Distingem trei cazuri:
1. $m=0$ şi atunci $n\in\mathbb{Z}$ poate fi arbitrar;
2. $n=0$ şi atunci $m\in\mathbb{Z}$ poate fi arbitrar;
3. $mn-3m-3n+1=0$, sau, echivalent, $(m-3)(n-3)=8$. Deducem că $(m-3,\,n-3)\in\{(-8,-1),(-4,-2),(-2,-4),(-1,-8),(1,8),(2,4),(4,2),(8,1)\}$ adică $(m,n)\in\{(-5,2),(-1,1),(1,-1),(2,-5),(4,11),(5,7),(7,5),(11,4)\}$.
În concluzie, soluţiile sunt: $(m,n)\in\{(a,0)\mid a\in\mathbb{Z}\}\cup\{(0,b)\mid b\in\mathbb{Z}\}\cup\{(-5,2),(-1,1),(1,-1),(2,-5),(4,11),(5,7),(7,5),(11,4)\}$.

Observaţie: O problemă cu un enunţ asemănător (dar cu o rezolvare semnificativ diferită) a fost dată la a 16-a Olimpiadă de matematică din SUA:

Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi nenule ecuaţia

$$(x^2+y)(x+y^2)=(x-y)^3.$$

Pentru rezolvarea acestei probleme se poate vedea *Titu Andreescu, Dorin Andrica – O introducere în studiul ecuaţiilor diofantiene*, Ed. GIL, 2002, pag. 15 şi 123.

Problema 2. Arătaţi că, oricare ar fi numărul natural n, printre numerele n, $n+1$, $n+2$, ..., $2n$ se găseşte cel puţin un pătrat perfect.

* * *

Soluţie:
Presupunem că ar exista un număr natural n pentru care printre numerele n, $n+1$, $n+2$, ..., $2n$ nu s-ar găsi niciun pătrat perfect. Atunci toate aceste numere s-ar afla între două pătrate perfecte consecutive, adică am avea $k^2<n<n+1<\ldots<2n<(k+1)^2$, adică $n\geq k^2+1$ şi $2n\leq(k+1)^2-1$. Ar rezulta că $2k^2+2\leq 2n\leq k^2+2k$, adică am avea $k^2+2\leq 2k$. Dar $k^2+2-2k=(k-1)^2+1>0$, prin urmare am ajuns la o contradicţie, deci presupunerea făcută este falsă.

Problema 3. Fie $(BD$ bisectoarea unghiului B al triunghiului ABC, $D\in AC$. Cercul circumscris triunghiului BCD intersectează a doua oară dreapta AB în punctul E, iar cercul circumscris triunghiului ABD intersectează a doua oară dreapta BC în punctul F. Arătaţi că $AE=CF$.

Olimpiadă Sankt Petersburg, 1996

Soluţie:
Din puterea punctului A faţă de cercul circumscris triunghiului BCD avem

$$(1) \qquad AB \cdot AE = AD \cdot AC.$$

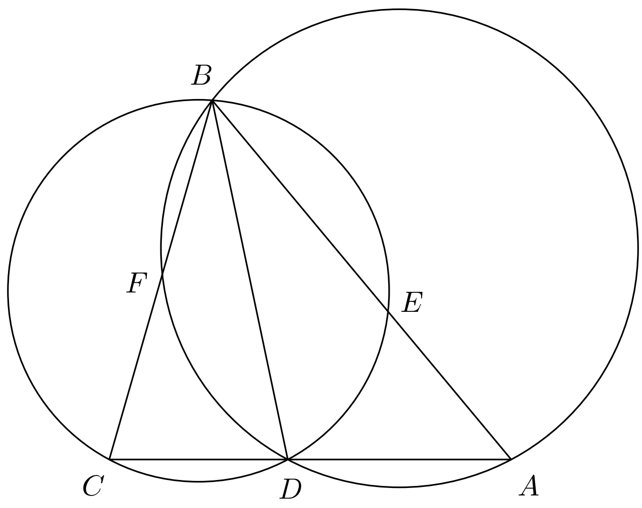
Din puterea punctului C faţă de cercul circumscris triunghiului BAD avem

$$(2) \qquad CB \cdot CF = CD \cdot AC.$$

Din teorema bisectoarei, avem

$$(3) \qquad \frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD}.$$

Împărţind relaţia (1) cu relaţia (2) şi ţinând seama de relaţia (3) obţinem imediat că $AE = CF$.



Problema 4. Doi copii, Alina şi Bogdan, joacă următorul joc. Pe tablă sunt scrise numerele de la 1 la n. Cei doi copii, începând cu Alina, şterg, alternativ, câte un număr de pe tablă, până când pe tablă rămân două numere. Dacă suma numerelor rămase pe tablă este divizibilă cu 3, câştigă Alina; în caz contrar, câştigă Bogdan. Cine câştigă la joc corect dacă:
a) $n = 2014$;
b) $n = 2013$.

* * *

Soluţie:
a) Bogdan are strategie câştigătoare. De exemplu, el poate grupa numerele de pe tablă în perechi cu suma 2015: $(1, 2014)$, $(2, 2013)$, $\ldots$, $(1007, 1008)$. Dacă Alina şterge unul din numerele ce compun o anumită pereche, Bogdan îl şterge pe celălalt. Atunci când îi vine rândul, Alina este obligată să ,,înceapă" de fiecare dată o pereche nouă. După ce copii au şters câte 1006 numere, pe tablă a rămas o pereche ,,completă" $(k, 2015 - k)$, deci, procedând astfel, Bogdan a făcut ca suma celor două numere rămase pe tablă să fie 2015, care nu este divizibil cu 3, lucru care i-a asigurat victoria.
b) De această dată Alina are strategie câştigătoare. De exemplu, ea poate începe prin a şterge numărul 2013 de pe tablă. Alina poate acum grupa numerele rămase pe tablă în perechi cu suma 2013: $(1, 2012), (2, 2011), \ldots, (1006, 1007)$. De astă dată Bogdan va fi cel care începe fiecare pereche şi Alina va şterge mereu celălalt număr din pereche. Ultimele două numere vor forma o pereche completă de forma $(k,\ 2013 - k)$, deci suma lor va fi 2013, multiplu de 3, ceea ce îi va asigura Alinei victoria.