Problema 1. Se consideră şirul $a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...$ definit astfel: $a_1 = 6,\ a_2 = 1,\ a_3 = 0,\ a_4 = 5$ şi pentru $n \geq 5,\ n$ număr natural, a_n se defineşte ca fiind ultima cifră a sumei celorlalţi patru termeni precedenţi. Astfel, prin concatenare, şirul devine: 61052850... .

Arătaţi că secvenţa 2012 este în şir.

Manuela Prajea

Soluţie: Considerăm toate grupurile de patru cifre consecutive disjuncte care apar în şir. Adică: 6105, 2850, 5881, ... şi cum sunt 10^4 grupuri de patru cifre posibile, deducem că la un moment dat un grup de patru cifre se va repeta, de exemplu $\overline{abcd}$. Din regula de definire a şirului deducem că următoarele cifre care vor apărea după grupul $\overline{abcd}$ vor fi unic determinate de aceste patru cifre, deci şi acestea se vor repeta, adică dacă după grupul $\overline{abcd}$ va apărea grupul $\overline{efgh}$, atunci din nou după apariţia grupului $\overline{abcd}$ va apărea grupul $\overline{efgh}$, etc şi şirul devenind astfel, de la un moment dat, periodic. De fapt, din modul în care este definit şirul, se vede că şi termenii care preced un grup $\overline{abcd}$ sunt unic determinaţi de cifrele a, b, c, d, deci cifrele care preced un grup $\overline{abcd}$ vor fi mereu aceleaşi pentru fiecare repetare a grupului $\overline{abcd}$. De aici rezultă că şirul este periodic de la început. Prin urmare grupul 6105 va mai apărea în şir. Ne uităm la a doua apariţie a grupului 6105. Aplicând regula de determinare a termenilor şirului, deducem că termenii din stânga grupului 6105 sunt în ordine: 8, apoi 5, apoi 2, apoi 1, apoi 0, apoi 2, etc, deci o secvenţă din şir este: ...$\underline{2012}$586105..., adică secvenţa 2012 este în şirul dat.

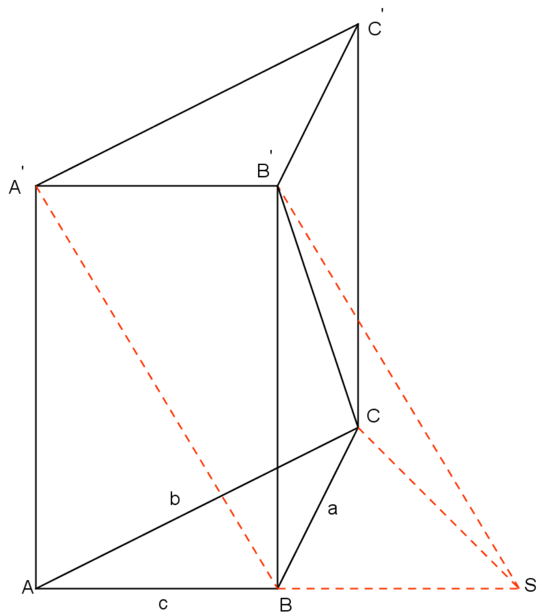
Problema 2. Se consideră $ABCA'B'C'$, o prismă dreaptă având $AA' > \max\{AB,\ BC,\ CA\}$ şi

$\sphericalangle(A'B,\ B'C) \equiv \sphericalangle(B'C,\ C'A) \equiv \sphericalangle(C'A,\ A'B)$.

Arătaţi că baza prismei este un triunghi echilateral.

Manuela Prajea

Soluţie: Fie $S \in AB$ astfel încât $A'BSB'$ este paralelogram. Notăm $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $AA' = x$ şi $\sphericalangle(A'B,\ B'C) = \alpha$, $\alpha \in (0°;\ 90°]$. Construind paralelogramul $A'B'SB$ avem $m(\widehat{SB'C}) = \alpha$ sau $m(\widehat{SB'C}) = 180° - \alpha$ şi $B'S = \sqrt{c^2 + x^2}$, $B'C = \sqrt{a^2 + x^2}$.



În triunghiul ACS, $[CB]$ este mediană şi din teorema medianei obţinem

$$CS^2 = 2a^2 - b^2 + 2c^2, \qquad (1)$$

iar cu teorema cosinusului în triunghiul $SB'C$ obţinem

$$CS^2 = a^2 + c^2 + 2x^2 \pm 2\sqrt{(a^2 + x^2)(c^2 + x^2)}\cos\alpha. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$\pm 2\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+c^2)}\cos\alpha = -2x^2+a^2-b^2+c^2. \quad (3)$$

Dacă vom considera paralelogramele $B^{'}C^{'}TC$, $(T \in BC)$ şi $C^{'}A^{'}UA$, $(U \in AC)$ obţinem relaţiile analoage cu (3):

$$\pm 2\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\cos\alpha = -2x^2+a^2+b^2-c^2, \quad (4)$$

$$\pm 2\sqrt{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\cos\alpha = -2x^2-a^2+b^2+c^2. \quad (5)$$

Cum $x > \max\{a,b,c\}$ deducem $2x^2 > a^2+c^2 > a^2-b^2+c^2$ şi deci $-2x^2+a^2-b^2+c^2 < 0$. La fel şi analoagele, $-2x^2-a^2+b^2+c^2 < 0, -2x^2+a^2+b^2-c^2 < 0$.

Cu aceasta, relaţiile (3), (4) şi (5) devin

$$-2\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+c^2)}\cos\alpha = -2x^2+a^2-b^2+c^2, \quad (3^{'})$$

$$-2\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\cos\alpha = -2x^2+a^2+b^2-c^2, \quad (4^{'})$$

$$-2\sqrt{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\cos\alpha = -2x^2-a^2+b^2+c^2. \quad (5^{'})$$

Scăzând relaţiile $(3^{'})$ şi $(4^{'})$ obţinem

$$\sqrt{x^2+a^2}\left(\sqrt{x^2+b^2}-\sqrt{x^2+c^2}\right)\cos\alpha = c^2-b^2$$

sau

$$\sqrt{x^2+a^2}\cdot\frac{b^2-c^2}{\sqrt{x^2+b^2}+\sqrt{x^2+c^2}}\cos\alpha = c^2-b^2,$$

de unde

$$(b^2-c^2)\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+b^2}+\sqrt{x^2+c^2}}\cos\alpha+1\right) = 0.$$

De aici deducem

$$b^2-c^2=0$$

(cealaltă paranteză fiind pozitivă) şi deci

$$b = c.$$

Analog, scăzând relaţiile $(3')$ şi $(5')$ obţinem

$$a = b.$$

În concluzie, baza prismei este un triunghi echilateral.

Problema 3. Să se determine numerele naturale n şi p pentru care numerele $p,\ p+3^n,\ p+3^{n+1},\ p+3^{n+2}$ şi $p+3^{n+3}$ sunt simultan prime.

M. S. Pop

Soluţie: Dacă $p \geq 3$ atunci p este impar şi deci $p + 3^n$, de exemplu, este sigur număr par, mai mare decât 2, aşadar nu poate fi număr prim. Rămâne $p = 2$.

Numerele devin

$$2,\ 2+3^n,\ 2+3^{n+1},\ 2+3^{n+2},\ 2+3^{n+3}.$$

Dacă $n = 0$ obţinem numerele $2,\ 3,\ 5,\ 11,\ 29$ care sunt prime.

Dacă $n = 1$ obţinem numerele $2,\ 5,\ 11,\ 29,\ 83$ care sunt prime.

Pentru $n = 2$ numărul $2 + 3^{n+3}$ are ultima cifră 5, este mai mare decât 5, deci nu este prim.

Pentru $n = 3$ numărul $2 + 3^{n+2}$ are ultima cifră 5, este mai mare decât 5, deci nu este prim.

Să observăm că ultima cifră a lui 3^{4k+1} este 3, pentru orice k număr natural.

Atunci, pentru $n = 4k$, numărul 3^{n+1} are ultima cifră 3 şi de aici, pentru $k \geq 1$, numărul $2 + 3^{n+1}$ nu e prim.

Pentru $n = 4k + 1$, numărul 3^n are ultima cifră 3 şi de aici, pentru $k \geq 1$, $2 + 3^n$ nu e prim.

Pentru $n = 4k + 2$, numărul 3^{n+3} are ultima cifră 3 şi de aici $2 + 3^{n+3}$ (având ultima cifră 5 şi fiind mai mare decât 5 pentru orice $k \geq 0$) nu e prim.

Pentru $n = 4k + 3$, $k \geq 0$, numărul 3^{n+2} are ultima cifră 3 şi de aici $2 + 3^{n+2}$ nu e prim.

În concluzie, toate numerele sunt prime dacă
$p = 2,\ n = 0$ sau $p = 2,\ n = 1$.

Problema 4. Pentru n număr natural rezolvaţi, în mulţimea numerelor întregi, ecuaţia

$$x^4 + y^4 = 13^n.$$

Manuela Prajea

Soluţie: Dacă $n = 0$ ecuaţia devine

$$x^4 + y^4 = 1$$

cu soluţiile $(\pm 1; 0)$ şi $(0; \pm 1)$.

Dacă $n \neq 0$, atunci 13^n este divizibil cu 13.

Orice număr întreg p dă la împărţirea cu 13 unul din resturile 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12. Atunci p^2 dă la împărţirea cu 13 unul din resturile 0,1,3,4,9,10,12, iar p^4 unul din resturile 0,1,3,9. Se observă că singura variantă care poate conduce la

$$x^4 + y^4 = 13^n$$

este cea cu x^4, y^4 divizibile cu 13, adică cea cu x, y divizibili cu 13.

Dacă (x, y) este o soluţie a ecuaţiei din enunţ cu $n > 0$, atunci $x = 13x_1,\ y = 13y_1$, unde $x_1^4 + y_1^4 = 13^{n-4}$. Dacă

$n-4>0$ găsim că $x_1 = 13x_2$, $y_1 = 13y_2$ şi $x_2^4 + y_2^4 = 13^{n-8}$. Continuăm procedeul până când, după k paşi, ajungem la ecuaţia $x_k^4 + y_k^4 = 13^{n-4k}$, unde $r = n - 4k \in \{0, 1, 2, 3\}$ este restul împărţirii lui n la 4.

Dacă $r \in \{1, 2, 3\}$ (adică n nu este divizibil cu 4) atunci am văzut că $x_k = 13x_{k+1}$, $y_k = 13y_{k+1}$, deci membrul stâng este divizibil cu 13^4 în vreme ce membrul drept nu este divizibil cu 13^4. Prin urmare, dacă n nu este divizibil cu 4, ecuaţia nu are soluţii.

Dacă $r = 0$ (adică n este divizibil cu 4) rezultă că $(x_k, y_k) \in \{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$, de unde obţinem $(x, y) \in \{(\pm 13^m, 0), (0, \pm 13^m)\}$, unde $m = \dfrac{n}{4}$.

În concluzie, dacă n nu este divizibil cu 4 atunci ecuaţia nu are soluţii, iar dacă $n = 4m$, $m \in \mathbb{N}$, atunci ecuaţia are soluţiile $(\pm 13^m, 0)$ şi $(0, \pm 13^m)$.