Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$(x^2+y^2)^3=(x^3-y^3)^2.$$

* * *

Soluţie. Ecuaţia se scrie echivalent $x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6=x^6-2x^3y^3+y^6$, adică $3x^4y^2+3x^2y^4+2x^3y^3=0$, sau încă $x^2y^2(3x^2+2xy+3y^2)=0$. Rezultă că fie $x=0$, fie $y=0$, fie $3x^2+2xy+3y^2=0$. Ultima ecuaţie se poate scrie sub forma $2x^2+(x+y)^2+2y^2=0$ şi are unica soluţie $x=y=0$. Prin urmare soluţiile ecuaţiei sunt: $x=0,\ y\in\mathbb{R}$ şi $y=0,\ x\in\mathbb{R}$.

Problema 2. Se consideră un cerc $\mathcal{C}$ şi un punct A exterior acestuia. Din A se duc tangentele AB şi AC la cercul $\mathcal{C}$. Paralela prin B la AC intersectează $\mathcal{C}$ în D, iar dreapta AD intersectează $\mathcal{C}$ în punctul E.
Demonstraţi că dreapta BE conţine mijlocul segmentului (AC).

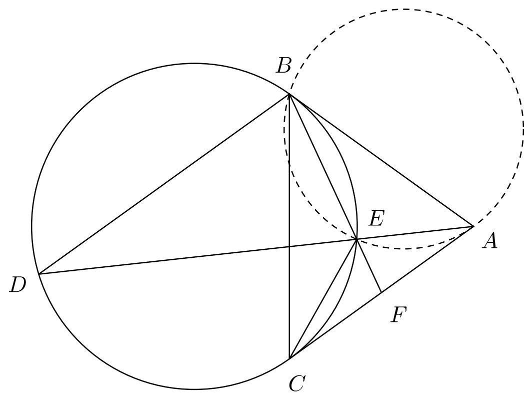
din *Culegere de probleme de geometrie*, autori *I.C. Drăghicescu, V. Masgras*[1]

Soluţia 1:
Notăm $BE\cap AC=\{F\}$. Folosind puterea punctului F faţă de cerc avem $|\rho(F)|=CF^2=FE\cdot FB$. Problema revine astfel la a arăta că $FA^2=FE\cdot FB$, sau $\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{FE}{FA}$. Cum $\angle FAE\equiv\angle ADB$ (alterne interne) şi $\angle ADB\equiv\angle ABE$, iar $\angle AFE\equiv\angle BFA$, deducem că $\Delta\,AFE\sim\Delta\,BFA$, de unde $\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{FE}{FA}$.

Observaţie: Faptul că trebuie să arătăm că BE trece prin mijlocul tangentei (AC) ne poate sugera să folosim proprietatea, prezentată în materialul teoretic de la această etapă, că axa radicală a două cercuri trece prin mijlocul tangentei comune la cele două cercuri. Cum axa radicală a două cercuri secante este dreapta determinată de punctele lor de intersecţie, este suficient să arătăm că CA este tangentă cercului circumscris triunghiului ABE. Acest lucru este imediat: din $\angle CAE\equiv\angle BDA$ (alterne interne) şi $\angle BDA\equiv\angle ABE$ (ambele subîntind arcul BE al cercului $\mathcal{C}$) rezultă că $\angle CAE\equiv\angle ABE$ ceea ce arată că AC este tangentă

[1] Editura Tehnică, 1987

cercului circumscris triunghiului ABE.



Soluţia 2: (dată de *Ştefan Tudose*)
Fie $\{M\} = AD \cap BC$ şi $\{F\} = BE \cap AC$. Deoarece AB şi AC sunt tangente la cercul $\mathcal{C}$, BC este polara lui A în raport cu cercul $\mathcal{C}$, de unde rezultă că (A, M, E, D) este diviziune armonică, adică

$$\frac{EA}{EM} = \frac{DA}{DM} \qquad (1).$$

Pe de altă parte, triunghiurile CMA şi BMD sunt asemenea, de unde

$$\frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MD}, \text{ deci } \frac{BC}{BM} = \frac{DA}{MD} \qquad (2).$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$\frac{EA}{EM} = \frac{BC}{BM} \qquad (3).$$

Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul AMC tăiat de transversala $F-E-B$ se obţine

$$\frac{BC}{BM} \cdot \frac{EM}{EA} \cdot \frac{FA}{FC} = 1,$$

de unde, folosind (3), $FA = FC$ şi concluzia.

Problema 3. Fie triunghiul ABC şi H un punct în interiorul său astfel încât

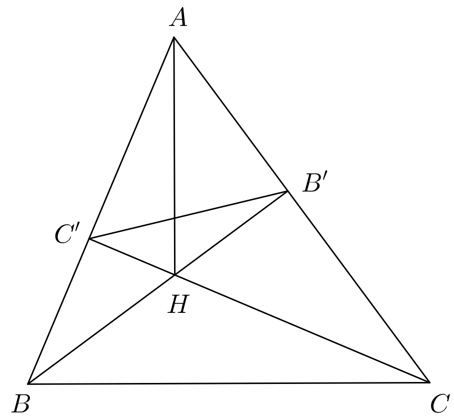
$$\angle HAB \equiv \angle HCB \text{ şi } \angle HBC \equiv \angle HAC.$$

Arătaţi că H este ortocentrul triunghiului ABC.

Manuela Prajea, lista scurtă ONM

Soluţie:
Fie B' punctul de intersecţie a dreptelor BH şi AC, iar C' punctul de intersecţie a dreptelor CH şi AB. Deoarece $m(\angle B'HC') = m(\angle CHB) = 180^\circ - m(\angle HBC) - m(\angle HCB) = 180^\circ - m(\angle HAC) - m(\angle HAB) = 180^\circ - m(\angle B'AC')$, rezultă că patrulaterul $AC'HB'$ este inscriptibil. Deducem că $\angle HB'C' \equiv \angle HAB \equiv \angle HCB$, de unde rezultă că şi patrulaterul $BCB'C'$ este inscriptibil. Atunci unghiurile $BB'C$ şi $BC'C$ sunt congruente. Însă din inscriptibilitatea patrulaterului $AC'HB'$ rezultă că ele sunt şi suplementare. Fiind congruente şi suplementare, unghiurile $BB'C$ şi $BC'C$ sunt drepte, deci BB' şi CC' sunt înălţimi în triunghiul ABC, deci H este ortocentrul acestui triunghi.

Observaţie: Cum ortocentrul este în interiorul triunghiului, rezultă că triunghiul ABC trebuie să fie ascuţitunghic, adică un punct H cu proprietăţile din enunţ există numai dacă triunghiul ABC este ascuţitunghic.



Problema 4. În fiecare vârf al unui poligon regulat cu $2n$ vârfuri este scris un număr întreg astfel încât numerele scrise în două vârfuri vecine să difere mereu prin 1. Numerele care sunt mai mari decât ambii lor vecini se numesc *munţi*, iar cele care sunt mai mici decât ambii lor vecini se numesc *văi*. Arătaţi că suma munţilor minus suma văilor este egală cu n.

Hraskó András, Concusul KöMaL, Ungaria, 2000

Soluţia 1:
Vom fixa un vârf care conţine un munte şi vom parcurge vârfurile poligonului în

sensul acelor de ceasornic. După $2n$ paşi ne vom întoarce la vârful de la care am pornit. Despre un pas vom spune că ,,am urcat” dacă pasul a fost făcut dintr-un vârf cu un număr mai mic într-un vârf cu un număr cu 1 mai mare şi vom spune că ,,am coborât” dacă pasul a fost făcut dintr-un vârf cu un număr mai mare într-un vârf cu un număr cu 1 mai mic. Deoarece după $2n$ paşi (de înălţime egală cu 1 fiecare), ne-am întors la ,,înălţimea” iniţială, rezultă că la n dintre paşi am urcat şi la ceilalţi n am coborât. Cum munţii alternează cu văile (abstracţie făcând de vârfurile care nu sunt nici munţi, nici văi), avem un număr egal de munţi şi văi. Diferenţa dintre fiecare munte şi valea următoare este cât se coboară. Suma acestor diferenţe este aşadar n.

Soluţia 2: (dată de *Ştefania Ligia Jianu*)
Notând numerele din vârfurile poligonului, în ordine, cu $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ şi cu S suma $S = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_{2n-1} - a_{2n}| + |a_{2n} - a_1|$, avem că
$S = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{2n \text{ termeni}} = 2n$.
Pe de altă parte, putem scrie $S = \alpha_1(a_1 - a_2) + \alpha_2(a_2 - a_3) + \cdots + \alpha_{2n-1}(a_{2n-1} - a_{2n}) + \alpha_{2n}(a_{2n} - a_1)$, unde $\alpha_k = 1$ dacă $a_k - a_{k+1} = 1$ şi $\alpha_k = -1$ dacă $a_k - a_{k+1} = -1$ (dacă notăm $a_{2n+1} = a_1$).
Desfăcând parantezele şi regrupând, obţinem

$$S = (\alpha_1 - \alpha_{2n})a_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)a_2 + \cdots + (\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1})a_{2n}.$$

Astfel obţinem o sumă în care fiecare a_k este înmulţit cu un coeficient care poate fi $-2,\ 0$ sau 2. Mai precis, coeficientul lui a_k va fi:
• 2, dacă a_k este munte,
• -2, dacă a_k este vale,
• 0, dacă a_k are un vecin mai mic şi unul mai mare (adică nu este nici munte, nici vale).
Astfel, obţinem că $S = 2(\text{suma munţilor}) - 2(\text{suma văilor})$, de unde
$(\text{suma munţilor}) - (\text{suma văilor}) = n$.

Soluţia 3: (bazată pe ideea lui *Mihai Marcian* şi pe soluţia oficială din concursul KöMaL)
Considerăm un vârf în care este scris cel mai mic număr. Numerotăm vârfurile de la 0 la $2n$, vârful ales având att̂ numărul 0 cât şi numărul $2n$. Reprezentăm într-un sistem de axe xOy punctele de coordonate $A_k(k, x_k - x_0)$ unde x_k este numărul scris în vârful cu numărul k. Astfel $A_0(0,0)$, $A_1(1,1)$, apoi $A_2(2, 1 \pm 1)$, ş.a.m.d. $A_{2n-1}(2n-1, 1)$ şi $A_{2n}(2n, 0)$. Unind punctele consecutive obţinem o linie poligonală pe care o putem asemui cu o panoramă în care munţii din problemă au aspect de munţi, iar văile aspect de văi. Vom lua la rând munţii şi vom scădea 2 din ei. Astfel, in loc să fie cu 1 mai mari decât vecinii lor, ei vor fi cu 1 mai mici, devenind astfel văi. Vom arăta că aceste scăderi nu modifică diferenţa dintre suma munţilor şi suma văilor (deci că această diferenţă rămâne INVARIANTĂ

la aceste operaţi de transformare a munţilor în văi). Pe parcursul acestor scăderi (de nivel) se vor forma alţi munţi; vom efectua aceste scăderi şi asupra munţilor formaţi ulterior, dar nu şi a capetelor, A_0 şi A_{2n}. Deoarece $x_k - x_0 \geq -k$, acest proces de scăderi nu poate continua la nesfârşit. Prin urmare, atunci când el va lua sfârşit, nu vom mai avea niciun munte (cu excepţia capetelor). Am ajuns astfel la un ,,peisaj" în formă de ,,V", cu o singură vale, $x_n = x_0 - n$. Pentru această configuraţie, diferenţa dintre suma munţilor, x_0 şi sumă văilor, x_n, este n. Dacă arătăm că diferenţa dintra suma munţilor şi cea a văilor este invariantă la aceste scăderi, cum la sfârşit ea este n, rezultă că pentru orice configuraţie iniţială ea este tot n.
Când efectuăm operaţia de scădere a muntelui k cu $x_k = a$, acesta devine vale cu $x_k = a - 2$. Să ne uităm la cei doi vecini ai lui k: $k - 1$ şi $k + 1$. Pentru fiecare din ei se întâmplă următorul lucru: dacă a fost vale, atunci acum nu mai este vale; dacă nu a fost vale atunci acum este munte. (Alt caz nu există, $x_{k\pm1}$ neputând fi munţi înaintea efectuării operaţiei.)
Distingem trei cazuri, în functie de câţi dintre vecinii lui k devin munţi după efectuarea operaţiei asupra lui x_k: 0, 1 sau 2.
Cazul 1. x_{k-1} şi x_{k+1} nu devin munţi. Atunci ei au fost văi şi acum nu mai sunt. Suma munţilor a scăzut cu a (x_k nu mai este munte), suma văilor a crescut cu $a - 2$ ($x_k = a - 2$ este acum vale) dar scade cu $2(a - 1)$ ($x_{k\pm1} = a - 1$ nu mai sunt văi), deci per total suma văilor scade cu $2(a - 1) - (a - 2) = a$, la fel ca şi suma munţilor, deci diferenţa dintre suma munţilor şi cea a văilor nu se schimbă.
Cazul 2. Exact unul dintre x_{k-1} şi x_{k+1}, să zicem x_{k-1}, devine munte. Atunci x_{k+1} a fost vale şi acum nu mai este. Suma munţilor a scăzut cu a (x_k nu mai este munte) şi a crescut cu $a-1$ ($x_{k-1} = a-1$ a devenit munte). Suma văilor a crescut cu $a - 2$ ($x_k = a - 2$ este acum vale) dar scade cu $a - 1$ ($x_{k+1} = a - 1$ nu mai este vale). Suma munţilor şi suma văilor scad cu 1, deci diferenţa lor nu se schimbă.
Cazul 3. x_{k-1} şi x_{k+1} devin munţi. Suma munţilor a scăzut cu a (x_k nu mai este munte) şi a crescut cu $2(a - 1)$ ($x_{k\pm1} = a - 1$ au devenit munţi), deci per total suma munţilor creşte cu $2(a - 1) - a = a - 2$. Suma văilor creşte şi ea cu $a - 2$ (căci $x_k = a - 2$ a devenit vale) la fel ca şi suma munţilor, deci diferenţa dintre suma munţilor şi cea a văilor nu se schimbă.

Soluţia 4: (prin inducţie, bazată pe ideea lui *Alexandru Bumbu*)
Vom demonstra afirmaţia din enunţ prin inducţie după $n \geq 2$.
Pentru $n = 2$ poligonul regulat este un pătrat. Numerele din vârfurile acestuia pot fi, în ordine: $a,\ a+1,\ a, a+1$ sau $a,\ a+1,\ a+2,\ a+1$ sau $a,\ a+1,\ a,\ a-1$ sau $a,\ a-1,\ a,\ a+1$ sau $a,\ a-1,\ a-2,\ a-1$ sau $a,\ a-1,\ a,\ a-1$. În primul caz avem doi munţi (ambii $a + 1$) şi două văi (ambele a), deci diferenţa dintre suma munţilor şi suma văilor este $2(a + 1) - 2a = 2$. La fel se întâmplă şi în ultimul caz. În celelalte cazuri avem un singur munte şi o singură vale, iar diferenţa dintre acestea este 2.

Presupunem afirmaţia adevărată pentru orice poligon regulat cu $2n$ laturi şi orice aşezare a numerelor în vârfurile acestuia care respectă condiţiile din enunţ. Considerăm un poligon regulat cu $2n+2$ laturi şi o configuraţie arbitrară de numere în vârfurile acestuia care respectă condiţiile din enunţ. Ne uităm la cel mai mare număr aflat într-un vârf şi la un vârf în care este scris acest număr. Evident acest număr este un munte. Eliminăm acest vârf, precum şi unul dintre cei doi vecini ai săi, dintre vârfurile poligonului. Obţinem un poligon cu $2n$ laturi. Mutăm puţin vârfurile acestuia (fără a le afecta ordinea) astfel încât poligonul să devină regulat. Numerele înscrise în vârfurile acestuia respectă condiţia din enunţ. (Dintr-o secvenţa de forma $a \pm 1,\ a,\ a+1,\ a,\ a \pm 1$ am scos $a+1$ din mijloc şi unul din cei doi de a, lăsând $a \pm 1,\ a,\ a \pm 1$.) Din ipoteza de inducţie, ştim că, pentru poligonul cu $2n$ vârfuri, suma vârfurilor minus suma văilor este n. Comparând munţii şi văile poligonului cu $2n+2$ vârfuri cu cele ale poligonului cu $2n$ vârfuri constatăm că avem situaţiile de mai jos (munţii sunt marcaţi cu (M), iar văile cu $V)$):

1. Dacă am eliminat numerele $a+1$ şi a din secvenţa $a-1$, a, $a+1$ (M), a, $a-1$ obţinând $a-1$, $a\,(M)$, $a-1$, atunci suma munţilor poligonului cu $2n+2$ este cu 1 mai mare decât suma munţilor poligonului cu $2n$ vârfuri, iar suma văilor este aceeaşi (în locul muntelui $a+1$ avem un munte a). Deoarece suma munţilor minus suma văilor este n pentru poligonul cu $2n$ vârfuri, această diferenţă va fi $n+1$ pentru poligonul cu $2n+2$ vârfuri.

2. Dacă am eliminat numerele $a+1$ şi a din secvenţa $a-1$, a, $a+1$ (M), a (V), $a+1$ obţinând $a-1$, a, $a+1$, atunci suma munţilor poligonului cu $2n+2$ este cu $a+1$ mai mare decât suma munţilor poligonului cu $2n$ vârfuri, iar suma văilor este cu a mai mare (în locul muntelui $a+1$ şi văii a nu avem nimic). Deoarece suma munţilor minus suma văilor este n pentru poligonul cu $2n$ vârfuri, această diferenţă va fi $n+1$ pentru poligonul cu $2n+2$ vârfuri.

3. Dacă am eliminat numerele $a+1$ şi a din secvenţa $a+1$, a, $a+1$ (M), a (V), $a-1$ obţinând $a+1$, a, $a-1$, atunci suma munţilor poligonului cu $2n+2$ este cu $a+1$ mai mare decât suma munţilor poligonului cu $2n$ vârfuri, iar suma văilor este cu a mai mare (în locul muntelui $a+1$ şi văii a nu avem nimic). Deoarece suma munţilor minus suma văilor este n pentru poligonul cu $2n$ vârfuri, această diferenţă va fi $n+1$ pentru poligonul cu $2n+2$ vârfuri.

4. Dacă am eliminat numerele $a+1$ şi a din secvenţa $a+1$, $a\,(V)$, $a+1$ (M), $a\,(V)$, $a+1$ obţinând $a+1$, $a\,(V)$, $a+1$, atunci suma munţilor poligonului cu $2n+2$ este cu $a+1$ mai mare decât suma munţilor poligonului cu $2n$ vârfuri, iar suma văilor este cu a mai mare (în locul muntelui $a+1$ şi văii a nu avem nimic). Deoarece suma munţilor minus suma văilor este n pentru poligonul cu $2n$ vârfuri, această diferenţă va fi $n+1$ pentru poligonul cu $2n+2$ vârfuri.

Pentru alte probleme similare, a se vedea materialul Despre munţi şi văi.