Problema 1. Fie n, k şi ℓ trei numere naturale astfel încât $n-k$ şi $n+\ell$ să fie pătrate perfecte consecutive. Arătaţi că $n-k\ell$ este pătrat perfect.

* * *

Soluţie:
Fie m^2 şi $(m+1)^2$ pătratele perfecte din enunţ. Avem, aşadar, că $n-k=m^2$ şi $n+\ell=(m+1)^2$. Exprimăm k şi ℓ în funcţie de m şi n: $k=n-m^2$, $\ell=(m+1)^2-n$. Atunci $n-k\ell = n-(n-m^2)\big((m+1)^2-n\big) = n-n(m+1)^2+n^2+\big(m(m+1)\big)^2-nm^2 = n^2+n(1-m^2-2m-1-m^2)+\big(m(m+1)\big)^2 = n^2-2n\cdot m(m+1)+\big(m(m+1)\big)^2 = \big(n-m(m+1)\big)^2$ care este într-adevăr pătrat perfect.

Problema 2. Determinaţi numerele reale x care verifică relaţia $[x]=\{2x\}+\{4x\}$.

* * *

Soluţia 1:
Deoarece $0\le\{2x\}<1$ şi $0\le\{4x\}<1$, rezultă că $0\le[x]<2$, deci $[x]$ poate fi 0 sau 1.
• Dacă $[x]=0$ atunci trebuie ca $x\in[0,1)$ şi totodată $\{2x\}=\{4x\}=0$, adică $2x$ şi $4x$ trebuie să fie întregi. Convin $x=0$ şi $x=\frac{1}{2}$.
• Dacă $[x]=1$, avem pe de-o parte că $x\in[1,2)$, pe de altă parte că $\{2x\}+\{4x\}=1$. Această din urmă condiţie revine la $2x+4x\in\mathbb{Z}$, $2x\notin\mathbb{Z}$, $4x\notin\mathbb{Z}$ (a se vedea şi problema 2 din paragraful ,,Probleme instructive" din materialul teoretic). Trebuie aşadar ca $6x\in\mathbb{Z}$ dar $2x$, $4x\notin\mathbb{Z}$. Convin valorile $x\in\left\{\frac{7}{6},\frac{8}{6},\frac{10}{6},\frac{11}{6}\right\}$.
În concluzie, soluţiile ecuaţiei sunt $0,\ \frac{1}{2},\ \frac{7}{6},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{11}{6}$.

Soluţia 2:
Avem $[x]=2x-[2x]+4x-[4x]$, adică $6x=[x]+[2x]+[4x]\in\mathbb{Z}$, deci $6x\in\mathbb{Z}$. Fie $x=\frac{n}{6}$, $n\in\mathbb{Z}$. Ecuaţia revine la $n=\left[\frac{n}{6}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{2n}{3}\right]$.
În funcţie de restul împărţirii lui n la 6 distingem 6 cazuri:
1. $n=6k$; ecuaţia devine $6k=k+2k+4k$, de unde $k=0$, deci $n=0$, adică $x=0$;
2. $n=6k+1$; ecuaţia devine $6k+1=k+2k+4k$, de unde $k=1$, deci $n=7$, adică $x=\frac{7}{6}$;
3. $n=6k+2$; ecuaţia devine $6k+2=k+2k+(4k+1)$, de unde $k=1$, deci $n=8$, adică $x=\frac{4}{3}$;

4. $n = 6k+3$; ecuaţia devine $6k+3 = k+(2k+1)+(4k+2)$, de unde $k=0$, deci $n=3$, adică $x = \dfrac{1}{2}$;
5. $n = 6k+4$; ecuaţia devine $6k+4 = k+(2k+1)+(4k+2)$, de unde $k=1$, deci $n=10$, adică $x = \dfrac{5}{3}$;
6. $n = 6k+5$; ecuaţia devine $6k+5 = k+(2k+1)+(4k+3)$, de unde $k=1$, deci $n=11$, adică $x = \dfrac{11}{6}$.

În concluzie, soluţiile ecuaţiei sunt 0, $\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{6}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{11}{6}$.

Problema 3. Dacă r este un număr raţional dat, aflaţi toate numerele întregi z pentru care
$$2^z + 2 = r^2.$$

Olimpiadă Elveţia, 2011

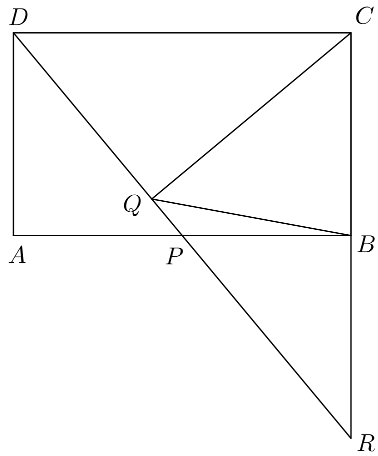
Soluţie:
Dacă $z \geq 0$, membrul stâng este un număr natural, deci trebuie ca r să fie un număr întreg.
• Dacă $z \geq 2$, membrul stâng este par dar nu este divizibil cu 4, deci nu este pătrat perfect. Prin urmare nu putem avea soluţie $z \geq 2$.
• Dacă $z = 1$, obţinem $r^2 = 4$, deci $z = 1$ este soluţie dacă $r \in \{-2, 2\}$.
• Dacă $z = 0$ obţinem $r^2 = 3$, imposibil cu r raţional.
• Dacă $z < 0$ este par, $z = -2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, ajungem la $\dfrac{1}{2^{2k}} + 2 = r^2$, adică la $\dfrac{1+2^{2k+1}}{2^{2k}} = r^2$. Trebuie aşadar ca $1 + 2^{2k+1}$ să fie pătrat perfect. Dacă $1 + 2^{2k+1} = m^2$, atunci $2^{2k+1} = (m-1)(m+1)$. Deoarece $(m-1, m+1) \in \{1, 2\}$, deducem că $m - 1 = 2$, deci $k = 1$. Aşadar $z = -2$ este soluţie a ecuaţiei dacă $r \in \left\{-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$.
• Dacă $z < 0$ este impar, $z = -2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, ajungem la $\dfrac{1+2^{2k+2}}{2^{2k+1}} = r^2$, adică la $\dfrac{2+2^{2k+3}}{2^{2k+2}} = r^2$. Trebuie aşadar ca $2 + 2^{2k+3}$ să fie pătrat perfect, ceea ce nu se poate deoarece $2 + 2^{2k+3}$ dă restul 2 la împărţirea cu 4.

În concluzie:
• dacă $r \in \{-2, 2\}$ atunci ecuaţia are soluţia unică $z = 1$;
• dacă $r \in \left\{-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$ atunci ecuaţia are soluţia unică $z = -2$;
• în toate celelalte cazuri ecuaţia nu are soluţii.

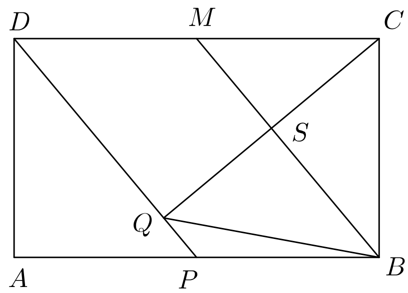
Problema 4. Fie $ABCD$ un dreptunghi, P mijlocul segmentului $[AB]$ şi Q proiecţia punctului C pe dreapta PD. Demonstraţi că triunghiul BQC este isoscel.

Olimpiadă Marea Britanie, 2003

Soluţia 1: (*Radu Andreica*)
Fie R intersecţia dreptelor PD şi BC. Deoarece $PB = \frac{1}{2}CD$ şi $PB \parallel CD$, rezultă că $[PB]$ este linie mijlocie în triunghiul RCD, deci B este mijlocul segmentului CR. Atunci $[QB]$ este mediană în triunghiul dreptunghic CQR, deci $QB = \frac{1}{2}CR = CB$, de unde concluzia.

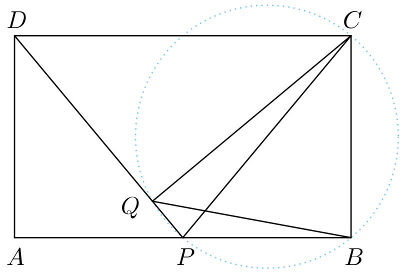


Soluţia 2: (*Alexandru Băbălău*)
Fie M mijlocul laturii $[CD]$. Având laturile opuse paralele şi congruente, patrulaterul $PBMD$ este paralelogram, deci $BM \parallel PD$. Fie $\{S\} = BM \cap CQ$. Pe de o parte avem că MS este linie mijlocie în triunghiul CQD, deci S este mijlocul segmentului $[CQ]$, pe de altă parte, $BS \parallel DQ$ şi $DQ \perp CQ$ implică $BS \perp CQ$. În triunghiul BCQ am văzut că BS este şi mediană şi înălţime, deci triunghiul BCQ este isoscel.



Soluţia 3: Distingem trei situaţii, în funcţie de poziţia punctului Q pe dreapta PD:
• dacă $Q \in (PD)$:
- triunghiurile DAP şi CBA sunt congruente (CC), deci $\angle DPA \equiv \angle CPB$;
- patrulaterul $BCQP$ este înscris în cercul de diametru $[CP]$ (unghiurile opuse $\angle CBP$ şi $\angle CQP$ sunt suplementare);

- deducem că, pe de o parte $\angle DPA \equiv \angle QCB$ (au acelaşi suplement, $\angle QPB$), pe de altă parte $\angle CQB \equiv \angle CPB$ (unghiuri făcute de laturi opuse cu diagonalele);
În concluzie, $\angle CQB \equiv \angle CPB \equiv \angle DPA \equiv \angle QCB$, deci triunghiul BQC este isoscel, de bază CQ.



• dacă Q coincide cu P:
triunghiurile dreptunghice DAP şi CBA sunt congruente (CC), deci $\angle DPA \equiv \angle CPB$; cum $m(\angle CPD) = 90°$, rezultă că $m(\angle CPB) = 45°$, deci triunghiul BCP este dreptunghic isoscel.

• dacă $P \in (DQ)$:
- triunghiurile DAP şi CBA sunt congruente (CC), deci $\angle DPA \equiv \angle CPB$;
- patrulaterul $BCPQ$ este înscris în cercul de diametru $[CP]$ (unghiurile congruente $\angle CBP$ şi $\angle CQP$ sunt unghiuri făcute de laturi opuse cu diagonalele);
- deducem că, pe de o parte $\angle QPB \equiv QCB$, pe de altă parte $\angle CQB \equiv \angle CPB$ (unghiuri făcute de laturi opuse cu diagonalele);

În concluzie, $\angle CQB \equiv \angle CPB \equiv \angle DPA \equiv \angle QPB \equiv \angle QCB$, deci triunghiul BQC este isoscel, de bază CQ.