Problema 1. Fie $n \geq 5$ un număr natural. Arătaţi că mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ poate fi împărţită în două submulţimi disjuncte A şi B astfel încât suma elementelor mulţimii A să fie egală cu produsul elementelor mulţimii B.

test de selecţie, Franţa, 2014

Soluţie:
Căutăm o mulţime B cu puţine elemente, de exemplu una de forma $B = \{1, a, b\}$. Produsul elementelor lui B este ab, iar suma elementelor lui A va fi $\frac{n(n+1)}{2} - 1 - a - b$. Obţinem condiţia $ab = \frac{n(n+1)}{2} - 1 - a - b$, care se scrie echivalent $(1+a)(1+b) = \frac{n(n+1)}{2}$.
Dacă n este par, putem lua $a = \frac{n}{2} - 1$ şi $b = n$. (Avem $1 < a < b \leq n$, deci $1, a, b$ sunt distincte.)
Dacă n este impar, putem lua $a = \frac{n+1}{2}$ şi $b = n - 1$. (Iarăşi, cum $1 < a < b \leq n$, numerele $1, a, b$ sunt distincte.)

Puteţi vedea şi celelalte probleme din cadrul acestui test prin corespondenţă la adresa aici.

Problema 2. Se consideră patru puncte necoplanare în spaţiu. Un plan se numeşte *egalizator* dacă se află la aceeaşi distanţă de fiecare din cele patru puncte. Câte plane egalizatoare există?

Olimpiadă Israel, 1995

Soluţie:
Cele patru puncte nu se pot afla toate de aceeaşi parte a planului egalizator pentru că ar fi coplanare. Punctele pot fi trei de o parte şi unul de cealaltă parte (obţinem planele mediatoare ale înălţimilor tetraedrului) sau două de o parte şi două de cealaltă parte a planului egalizator (se obţin planele mediatoare ale perpendicularelor comune a câte două din muchiile opuse ale tetraedrului). Avem $4 + 3 = 7$ plane egalizatoare.

Să justificăm afirmaţiile de mai sus.
În primul caz, dacă punctele A, B, C se află de o parte a planului egalizator α, iar punctul D de cealaltă parte, notând cu A', B', C' şi respectiv D' proiecţiile celor 4 puncte pe planul α, avem că $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ şi $AA' = BB' = CC'$. Rezultă că $ABB'A'$ şi $ACC'A'$ sunt dreptunghiuri, deci $AB \parallel A'B'$ şi $AC \parallel A'C'$, de unde $(ABC) \parallel \alpha$. În fine, dacă $\{D''\} = DD' \cap (ABC)$, avem că DD'' este înălţimea din D a tetraedrului $ABCD$, iar $DD' = AA' = dist\big((ABC), \alpha\big) = D'D''$ implică

faptul că α este planul mediator al înălţimii din D a tetraedrului.
Reciproc, este evident că planul mediator al înălţimii din D este plan egalizator.
Aşadar în primul caz se obţin 4 plane egalizatoare, mediatoarele celor 4 înălţimi ale tetraedrului.

În al doilea caz, dacă punctele A, B se află de o parte a planului egalizator α, iar punctele C, D de cealaltă parte, notând cu A', B', C' şi respectiv D' proiecţiile celor 4 puncte pe planul α, avem că $AA' \parallel BB'$ şi $CC' \parallel DD'$. Dacă, în plus, $AA' = BB' = CC' = DD'$ atunci $ABB'A'$ şi $CDD'C'$ sunt dreptunghiuri, deci $AB \parallel A'B'$ şi $CD \parallel C'D'$, de unde $AB \parallel \alpha$ şi $CD \parallel \alpha$. Fie E astfel încât $AEDC$ să fie paralelogram. Cum A, B, C, D nu erau coplanare, punctele A, B, E nu sunt coliniare, deci determină un plan. Cum $AE \parallel CD \parallel \alpha$ şi $AB \parallel \alpha$, avem că $(ABE) \parallel \alpha$. Fie XY, $X \in AB$, $Y \in CD$, perpendiculara comună a dreptelor AB şi CD. Atunci XY este perpendiculară pe planul (ABE), deci şi pe planul α. În plus, dacă $\{Z\} = XY \cap \alpha$, atunci $XZ = AA' = CC' = YZ$, deci Z este mijlocul lui $[XY]$, deci α este planul mediator al lui $[XY]$.
Aşadar, în acest caz se obţin planele mediatoare ale perpendicularelor comune pe perechile de muchii opuse ale tetraedrului: (AB, CD), (AC, BD) şi (AD, BC), adică alte 3 plane egalizatoare.

În concluzie, în total sunt 7 plane egalizatoare.

Observaţie: Dacă notăm cu M, N, P, Q, R, S mijloacele muchiilor AB, AC, AD, BC, BD, respectiv CD, atunci planele egalizatoare de tipul I sunt planele (MNP), (MQR), (NQS) şi (PRS), iar cele de tipul II sunt planele $(NPRQ)$, $(MPSQ)$ şi $(MNSR)$.

Problema 3. Determinaţi numerele naturale prime p şi q pentru care
$$p^3 - q^5 = (p+q)^2.$$
Olimpiadă Rusia, 1997

Soluţie:
Vom aborda problema pe cazuri, în funcţie de resturile pe care p şi q le dau la împărţirea cu 3.

Cazul 1. $p \equiv q \pmod 3$.
Deoarece $p^3 \equiv p \pmod 3$ şi $q^5 \equiv q \pmod 3$ rezultă că $p^3 - q^5 \equiv 0 \pmod 3$, deci $(p+q)^2 \equiv 0 \pmod 3$, de unde, cum $p \equiv q \pmod 3$, rezultă $p = q = 3$, care însă nu verifică ecuaţia.

Cazul 2. $p \equiv 1 \pmod 3$, $q \equiv -1 \pmod 3$.
În acest caz $(p+q)^2 \equiv 0 \pmod 3$, deci $p^3 \equiv q^5 \pmod 3$. Dar, cum $p^3 \equiv p \pmod 3$ şi $q^5 \equiv q \pmod 3$, rezultă că $p \equiv q \pmod 3$, contradicţie.

Cazul 3. $p \equiv -1 \pmod 3$, $q \equiv 1 \pmod 3$.

Acest caz este analog celui precedent şi duce la o contradicţie.

Cazul 4. $p = 3$.
În acest caz trebuie $q^5 < 27$, ceea ce nu se poate cu q prim.

Cazul 5. $q = 3$.
În acest caz ecuaţia revine la $p^3 - 243 = (p+3)^2$, adică $p^3 - p^2 - 6p = 252$. Deducem că $p \mid 252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, deci $p \in \{2, 3, 7\}$. Convine numai $p = 7$.

Aşadar singura soluţie a ecuaţiei este $p = 7$, $q = 3$.

Problema 4. Aflaţi numerele reale a, b, c, d, e ştiind că ele verifică simultan relaţiile

$$b + c - a = a^3,\ c + d - b = b^3,\ d + e - c = c^3,\ e + a - d = d^3,\ a + b - e = e^3.$$

* * *

Soluţie:
Datorită simetriei circulare, putem presupune că $\max\{a, b, c, d, e\} = a$.
Atunci $a \geq e$, deci şi $a^3 \geq e^3$, deci $b + c = a^3 + a \geq e^3 + e = a + b$. Deducem că $c \geq a$. Din alegerea lui $a = \max\{a, b, c, d, e\}$ rezultă însă şi că $a \geq c$, deci $a = c = \max\{a, b, c, d, e\}$. Atunci $c \geq b$ şi $c^3 \geq b^3$ implică $d + e = c^3 + c \geq b^3 + b = c + d$, deci $e \geq c$. Deducem că $e = c = a = \max\{a, b, c, d, e\}$. Atunci $e \geq d$ implică $a + b = e^3 + e \geq d^3 + d = e + a$, deci $b \geq e$, de unde $b = e$. În fine, $a = b = c = e = \max\{a, b, c, d, e\}$ implică $d = b^3 + b - c = a^3 - a - c = b$, deci $a = b = c = d = e \overset{\text{not.}}{=} x$. Revenind la una din relaţiile din enunţ, trebuie ca $x = x^3$, adică $x \in \{-1, 0, 1\}$. Problema are aşadar trei soluţii: $a = b = c = d = e = -1$, $a = b = c = d = e = 0$ şi $a = b = c = d = e = 1$.