Problema 1. Se consideră $a,\ b,\ c$ numere reale pozitive cu $abc = 1$. Să se arate că: $\dfrac{a}{2+bc} + \dfrac{b}{2+ca} + \dfrac{c}{2+ab} \geq 1$.

Manuela Prajea

Soluţie: Avem

$$\frac{a}{2+bc} + \frac{b}{2+ca} + \frac{c}{2+ab} = \frac{a^2}{2a+1} + \frac{b^2}{2b+1} + \frac{c^2}{2c+1} \overset{CBS}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)+3}.$$

Notând $s = a + b + c$, din inegalitatea mediilor şi $abc = 1$ avem $s \geq 3$. Folosind cele de mai sus, este suficient să arătăm că $\dfrac{s^2}{2s+3} \geq 1$ pentru orice $s \geq 3$. Acestă inegalitate se scrie echivalent $(s-1)^2 \geq 4$, ceea ce este evident pentru orice $s \geq 3$. Cu aceasta inegalitatea este demonstrată.
Egalitate avem pentru $a = b = c = 1$.

Problema 2. Fie n număr natural nenul şi S suma tuturor numerelor naturale x astfel încât $(n-1)^2 \leq x < (n+1)^2$.

a) Să se arate că $6 \mid S$.

b) Să se determine n ştiind că $S = 1386$.

Ştefan Smarandache

Soluţie:

a)

$$S = (n-1)^2 + \left[(n-1)^2 + 1\right] + ... + \left[(n-1)^2 + 4n - 1\right]$$

sau

$$S = 4n(n-1)^2 + \frac{4n(4n-1)}{2} = 2n(2n^2+1)$$

Evident S se divide cu 2, mai trebuie arătat că S se divide cu 3.

Dacă $n = 3k$, atunci $S = 6k(18k^2 + 1)$ şi evident se divide cu 3.

Dacă $n = 3k + 1$ sau $n = 3k + 2$, atunci $n^2 = M_3 + 1$, de unde $2n^2 + 1 = M_3$, adică S se divide cu 3.

Cum 2 şi 3 sunt prime între ele înseamnă că S se divide cu 6.

b) Trebuie să avem

$$2n(2n^2 + 1) = 1368$$

sau

$$2n^3 + n - 693 = 0$$

Relaţia de mai sus se scrie

$$(n - 7)(2n^2 + 14n + 99) = 0$$

de unde obţinem $n = 7$.

O altă cale de a finaliza: din $2n^3 + n = 693$ rezultă că $n \mid 693$ şi $n^3 < 347$, deci $n \in \{1, 3, 7\}$. Verificând aceste valori găsim că numai $n = 7$ satisface ecuaţia dată.

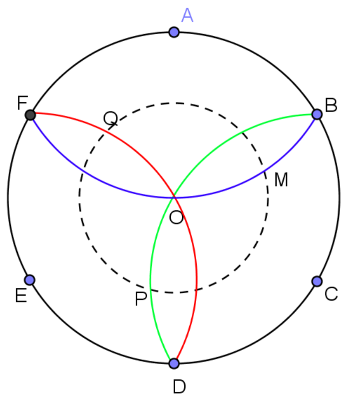
Problema 3. Se colorează punctele unui cerc de rază 1 (din interior şi de pe frontieră) cu 3 culori. Arătaţi că există o infinitate de segmente de lungime 1 având extremităţile de aceeaşi culoare.

Manuela Prajea

Soluţie: Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat înscris în cercul dat, O centrul acestuia şi M_1, M_2, M_3 mulţimile de puncte colorate cu cele trei culori date.

Presupunem, prin absurd, că nu există două puncte colorate la fel, situate la distanţă 1.

Dacă $O \in M_1$, atunci $A,\ C,\ E \in M_2$ şi $B,\ D,\ F \in M_3$.



Considerăm cercul $C\left(O; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Acesta va intersecta cercurile $C(A;1)$, $C(C;1)$, $C(E;1)$ în punctele $M,\ P$, respectiv Q, centrele triunghiurilor echilaterale BOC, DOE, respectiv FOA.

Punctele M, P, Q nu sunt din mulţimea M_2 deoarece $AM = CP = EQ = 1$, iar A, C, $E \in M_2$. De asemenea, deoarece $DM = FP = BQ = 1$ şi D, F, $B \in M_3$, rezultă că M, P, $Q \notin M_3$. Rezultă atunci că M, P, $Q \in M_1$. Dar $\triangle MPQ$ este echilateral de latură 1 rezultă că există puncte de aceeaşi culoare situate la distanţa 1, contradicţie.

Aşadar, există două puncte de aceeaşi culoare la distanţă 1.

Rotind hexagonul iniţial astfel încât vârful A să parcurgă arcul AB vom obţine o infinitate de hexagoane şi de fiecare dată cel puţin un segment de lungime 1 cu capetele de aceeaşi culoare. Segmentele „monocolore” găsite nu se pot repeta, aşadar rotind hexagonul se găsesc o infinitate de segmente „monocolore” distincte.

Problema 4. Determinaţi numerele naturale $n \geq 2$ care au proprietatea că există o mulţime de n puncte în plan având $\dfrac{n(n-1)}{2}$ axe de simetrie.

Manuela Prajea

Soluţie: „Dacă $n = 2$, atunci mulţimea $\{A_1,\ A_2\}$ are $\dfrac{2 \cdot (2-1)}{2} = 1$ axe de simetrie" este o afirmaţie falsă (o axă de simetrie este mediatoarea segmentului A_1A_2, dar şi dreapta A_1A_2 este axă de simetrie).

Dacă $n \geq 3$ notăm $\mathcal{A} = \{A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n\}$ o mulţime cu n puncte şi care are $\dfrac{n(n-1)}{2}$ axe de simetrie. Dacă o axă de simetrie conţine toate punctele din $\mathcal{A}$, atunci nu pot exista decât cel mult două axe de simetrie, absurd. Aşadar pentru fiecare axă de simetrie d există un punct $A \in \mathcal{A}$ nesituat pe d. Atunci şi simetricul lui A faţă de d aparţine lui $\mathcal{A}$, deci d este mediatoarea segmentului determinat de o pereche de puncte din $\mathcal{A}$. Deoarece trebuie să avem $\dfrac{n(n-1)}{2}$ axe de simetrie, adică tocmai numărul perechilor de puncte (distincte) din $\mathcal{A}$, rezultă că axele de simetrie sunt exact mediatoarele segmentelor determinate de punctele din $\mathcal{A}$.

Fie m_{ij} mediatoarea unui segment A_iA_j. Dacă $A_k \in \mathcal{A}$, diferit de A_i şi A_j nu este situat pe mediatoara m_{ij}, notăm A_p simetricul lui A_k faţă de m_{ij}. Atunci $m_{ij} = m_{kp}$ şi numărul axelor de simetrie ar fi mai mic decât $\dfrac{n(n-1)}{2}$. În concluzie, $A_k \in m_{ij}$, adică toate punctele din $\mathcal{A}$, diferite de A_i şi A_j, se află pe mediatoarea m_{ij}.

Dar acest lucru este evident imposibil pentru $n > 3$, deci singura posibilitate este pentru $n = 3$, anume mulţimea $\mathcal{A}$ formată din vârfurile unui triunghi echilateral.