Problema 1. Arătaţi că dacă $x, y > 0$ cu $xy = 1$ atunci $\dfrac{x^2+2}{y+1} + \dfrac{y^2+2}{x+1} \geq 3$.

Andrei Eckstein, Revista RMCS, nr. 27 (2009)

Soluţie:
Punând $y = \dfrac{1}{x}$ şi eliminând numitorii, inegalitatea revine la $x^5 - x^3 - x^2 + 1 \geq 0$, adică la $(x^3-1)(x^2-1) \geq 0$, sau încă la $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1) \geq 0$ care este evidentă, ultimii doi factori fiind pozitivi. Egalitate avem pentru $x = y = 1$.

Observaţie: Inegalitatea rămâne adevărată şi dacă înlocuim condiţia $xy = 1$ cu $x + y \geq 2$ care este clar mai slabă. (Faptul că $xy = 1$ implică $x + y \geq 2$ se vede uşor din inegalitatea mediilor.)
Acest fapt se poate demonstra de exemplu folosind inegalitatea lui Bergström, o variantă a inegalităţii Cauchy-Buniakowsky-Schwarz care mai este cunoscută şi drept inegalitatea Titu Andreescu (Titu's Lemma):
Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, atunci

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n},$$

cu egalitate dacă $\dfrac{a_1}{x_1} = \dfrac{a_2}{x_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{x_n}$.
În cazul nostru,

$$\frac{x^2+2}{y+1} + \frac{y^2+2}{x+1} = \frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+1} + 2\left(\frac{1^2}{y+1} + \frac{1^2}{x+1}\right) \geq \frac{(x+y)^2}{x+y+2} + 2 \cdot \frac{(1+1)^2}{x+y+2}.$$

Notând $x + y = 2$, ar fi suficient să arătăm că $\dfrac{s^2+8}{s+2} \geq 3$, adică $s^2 - 3s + 2 \geq 0$, care se scrie $(s-1)(s-2) \geq 0$ şi este evident adevărată de îndată ce $x + y = s \geq 2$.

Observaţie: Valoarea minimă pentru x, $y > 0$ (fără alte condiţii) a membrului stâng este $4(\sqrt{3}-1)$ şi se atinge pentru $x = y = \sqrt{3} - 1$.

Problema 2. Fie un pătrat $ABCD$ şi punctele $M \in (CD)$, $N \in (BC)$ astfel încât $DM = MC$ şi $BN = 3NC$. Arătaţi că cercul circumscris triunghiului AMN este tangent dreptei CD.

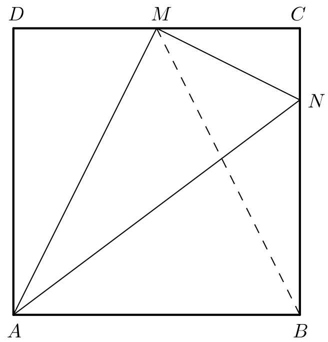
din cartea *Probleme calitative de geometrie plană*, de Maria Elena Panaitopol şi Laurenţiu Panaitopol[1]

Soluţie:
Deoarece $\dfrac{NC}{MD} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{CM}{AD}$ şi $m(\angle NCM) = m(\angle MDA) = 90°$, triunghiurile NCM şi MDA sunt asemenea. Atunci $m(\angle AMN) = 180° - m(\angle NMC) -$

[1]Editura Gil, 1996

$m(\angle AMD) = 180° - m(\angle NMC) - m(\angle MNC) = m(\angle NCM) = 90°$, deci patrulaterul $ABNM$ este inscriptibil. Cum triunghiurile BCM şi ADM sunt congruente (C.C.), rezultă că $\angle CMN \equiv \angle DAM \equiv \angle CBM \equiv \angle NAM = \frac{1}{2}m(MN)$, de unde CD este tangentă la cerc.

Altă finalizare: Centrul cercului circumscris triunghiului AMN este mijlocul P al lui $[AN]$, deci se află pe linia mijlocie a trapezului dreptunghic $ADCN$, deci $PM \perp CD$. Aşadar CD este perpendiculara pe raza PM în punctul M de pe cerc, deci este tangetă la cerc.



Observaţie: Faptul că $m(\angle AMN) = 90°$ se putea stabili şi cu reciproca teoremei lui Pitagora aplicată în triunghiul AMN după ce în prealabil s-au exprimat lungimile segmentelor AM, AN, MN (ipotenuze în triunghiuri dreptunghice) în funcţie de lungimea laturii pătratului.

Observaţie: Din soluţia de mai sus rezultă că $(AM$ este bisectoarea unghiului $\angle DAN$. Acest lucru putea fi demonstrat şi altfel: considerând $\{P\} = AN \cap CD$, se calculează succesiv $CP = \frac{1}{3}AD$, $AP = \frac{5}{3}AD$ (din teorema lui Pitagora), apoi se aplică reciproca teoremei lui Pitagora, sau, altfel, folosind o problemă clasică[2] afirmând că $(AM$ e bisectoarea $\angle DAN$ dacă şi numai dacă $AN = BN + DM$, relaţie care se verifică imediat pentru configuraţia din problemă.

Problema 3. Se consideră numerele naturale nenule a, b şi n, cu $(a, n) = 1$. Calculaţi

$$S_n = \left\{\frac{a+b}{n}\right\} + \left\{\frac{2a+b}{n}\right\} + \left\{\frac{3a+b}{n}\right\} + \cdots + \left\{\frac{na+b}{n}\right\},$$

unde $\{x\}$ desemnează partea fracţionară a numărului real x.

* * *[3]

[2] Pentru demonstraţie, consideraţi R pe semidreapta opusă lui $(DC$ astfel ca $\Delta ABN \equiv \Delta ADR$. Atunci $AN = BN + DM \Leftrightarrow RM = AR \Leftrightarrow \angle RAM \equiv \angle RMA \equiv \angle BAM \Leftrightarrow \angle NAM \equiv \angle MAD$ (ca diferenţă de unghiuri congruente) $\Leftrightarrow$ $(AM$ este bisectoarea $\angle DAN$.

[3] preluată din cartea Gheorghe Andrei, Ion Cucurezeanu, Constantin Caragea − *Probleme de algebră, Funcţiile parte întreagă şi parte fracţionară*, Editura Gil, 1996

Soluţie:
Folosind teorema împărţirii cu rest, avem că, pentru orice $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\} \overset{\text{not}}{=} A$, există q_k, $r_k \in \mathbb{N}$, cu $0 \leq r_k < n$, astfel încât $ka + b = n \cdot q_k + r_k$.

Presupunând, prin reducere la absurd, că există k, $j \in A$, $k \neq j$, astfel încât $r+k = r_j$, am ajunge la $ka+b-n \cdot q_k = ja+b-n \cdot q_j$, adică la $a(k-j) = n(q_k - q_j)$. Ar rezulta atunci că $n \mid a(k-j)$, iar cum $(a, n) = 1$, am obţine că $n \mid k-j$, ceea ce este imposibil cu $k, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ cu $k \neq j$.

Rezultă aşadar că numerele $ka + b$, $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, dau resturi distincte două câte două la împărţirea la n, adică $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.
Avem atunci că

$$S_n = \frac{r_1}{n} + \frac{r_2}{n} + \cdots + \frac{r_n}{n} = \frac{0}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n} = \frac{(n-1)n}{2n} = \frac{n-1}{2}.$$

Problema 4. În fiecare pătrăţel al unei table de şah 3×3 se trece câte o cifră. Un cal este mutat de-a lungul unui drum în formă de L constituit din patru pătrăţele: 3 într-o direcţie, apoi unul în direcţie perpendiculară. În câte moduri se poate completa tabla de şah cu numere de o cifră, nu neapărat distincte, astfel încât suma celor patru numere acoperite de orice asemenea mutare de cal să fie aceeaşi?

* * *

Soluţie:
Să notăm coloanele pătratului cu A, B şi C, iar liniile cu 1, 2 şi 3. Vom nota cu a_1, a_2, ..., c_3 cifrele înscrise în pătratele A1, A2, ... , C3. Atunci avem $b_1 + a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 + b_3$, de unde $b_1 = b_3$. Analog obţinem că $a_1 = a_3$, $c_1 = c_3$, $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2$ şi $a_3 = c_3$. Avem de asemenea că $b_1 + b_2 + b_3 + a_3 = a_3 + a_2 + b_2 + c_2$, de unde $b_1 + b_3 = a_2 + c_2$. Cum $a_2 = c_2$ şi $b_1 = b_3$, rezultă că $a_2 = c_2 = b_1 = b_3 \overset{\text{not.}}{=} x$. Avem şi $a_1 = a_3 = c_3 = c_1 \overset{\text{not.}}{=} y$. În fine, din $b_1 + b_2 + b_3 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 + b_3$ rezultă $b_1 + b_2 = a_1 + a_2$ adică $x + b_2 = y + x$, de unde $b_2 = y$. Prin urmare toate pătratele negre ale tablei de şah trebuie să conţină o aceeaşi cifră şi toate pătratele albe trebuie să conţină o aceeaşi cifră, nu neapărat diferită de cea aflată în pătratele negre. În plus, orice grup de patru pătrăţele care constituie drumul unui cal conţine două pătrăţele albe şi două negre, deci suma va fi aceeaşi pentru orice asemenea grup. Cifra din pătratele negre poate fi aleasă în 10 moduri (sunt 10 cifre), iar cea din pătratele albe tot în 10 feluri. Prin urmare, din principiul produsului, sunt $10 \cdot 10 = 100$ de completări convenabile ale pătratelor tablei de şah.