Problema 1. În fiecare pătrăţel al unei table 10×10 este scris câte un număr real. Emilia a calculat toate produsele de două numere scrise în pătrăţele diferite ale tablei şi a constatat că exact 1000 dintre aceste produse erau negative. De câte ori apărea numărul 0 printre numerele cu care era completată tabla? Găsiţi toate răspunsurile posibile.

Concursul Náboj, Cehia şi Slovacia, 2011

Soluţie:
Dacă notăm cu p, n numărul de numere pozitive, respectiv negative din pătrăţelele tablei, avem că $0 \leq p \leq 100$ şi $0 \leq n \leq 100$ (sunt $10 \times 10 = 100$ de numere în tabel). De asemenea trebuie ca $n + p \leq 100$, diferenţa $100 - n - p$ reprezentând numărul, căutat, de numere egale cu 0 aflate în tabel. Produse negative se obţin numai înmulţind un număr pozitiv cu unul negativ, aşadar avem $n \cdot p = 1000$. Analizând posibilităţile, găsim variantele $\{n, p\} = \{10, 100\}$, $\{n, p\} = \{20, 50\}$ şi $\{n, p\} = \{25, 40\}$. Prima variantă nu respectă $n + p \leq 100$. Rămân celelalte două, pentru care numărul de zerouri este $100 - 20 - 50 = 30$, respectiv $100 - 25 - 40 = 35$. Se verifică uşor că ambele variante sunt într-adevăr posibile.
Aşadar numărul de zerouri poate fi 30 sau 35.

Problema 2. Calculaţi suma

$$1000^2 + 999^2 - 998^2 - 997^2 + 996^2 + 995^2 - 994^2 - 993^2 + \cdots + 4^2 + 3^2 - 2^2 - 1^2.$$

* * *

Soluţia 1:
Grupăm cei 1000 de termeni în 250 de grupe de câte 4 astfel încât în fiecare grupă să avem o sumă de tipul $(4k+4)^2 + (4k+3)^2 - (4k+2)^2 - (4k+1)^2$, cu $k = 0, 1, 2, \ldots, 249$.
În fiecare grupă, avem $(4k+4)^2 + (4k+3)^2 - (4k+2)^2 - (4k+1)^2 = (16k^2 + 32k + 16) + (16k^2 + 24k + 9) - (16k^2 + 16k + 4) - (16k^2 + 8k + 1) = 32k + 20$.
Prin urmare, suma de calculat este:
$32 \cdot 0 + 20 + 32 \cdot 1 + 20 + 32 \cdot 2 + 20 + \cdots + 32 \cdot 249 + 20 = 32(0 + 1 + 2 + \cdots + 249) + 250 \cdot 20 = 16 \cdot 249 \cdot 250 + 5000 = 1001000$.

Soluţia 2:
Notăm cu S suma şi avem:
$S = 1000^2 - 998^2 + 999^2 - 997^2 + 996^2 - 994^2 + 995^2 - 993^2 + \ldots + 4^2 - 2^2 + 3^2 - 1^2$.
Folosind formula $a^2 b^2 = (a+b)(a-b)$, S devine
$S = 2(1000+998) + 2(999+997) + 2(996+994) + 2(995+993) + \ldots + 2(4+2) + 2(3+1)$, adică
$S = 2(1000 + 999 + 998 + 997 + 996 + 995 + 994 + 993 + \ldots + 4 + 3 + 2 + 1) =$

$1000 \cdot 1001 = 1001000$.

Problema 3. Pe fiecare dintre feţele unui cub se scrie câte un număr natural nenul. Fiecărui vârf al cubului i se asociază produsul numerelor scrise în cele trei feţe care conţin respectivul vârf. Suma numerelor asociate celor opt vârfuri ale cubului este 2013. Care sunt valorile posibile ale sumei numerelor scrise pe cele şase feţe?

Concursul Náboj, Cehia şi Slovacia, 2011, prelucrare

Soluţie: Dacă notăm cu x, y, z numerele scrise pe cele trei feţe care conţin vârful A al cubului şi cu x', y' şi respectiv z' numerele scrise pe feţele opuse acestora (x' şi x sunt scrise pe feţe opuse şi la fel y, y' şi z, z'), atunci în cele opt vârfuri ale cubului sunt scrise numerele xyz, xyz', $xy'z$, $xy'z'$, $x'yz$, $x'yz'$, $x'y'z$ şi $x'y'z'$. Suma acestora este $(x+x')(y+y')(z+z') = 2013$. Deoarece $x+x'$, $y+y'$ şi $z+z'$ sunt numere naturale mai mari ca 1, iar unica scriere a lui 2013 ca produs de trei numere naturale mai mari ca 1 este $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, rezultă că numerele $x+x'$, $y+y'$ şi $z+z'$ sunt tocmai numerele 3, 11 şi 61 (într-o anumită ordine), deci singura valoare posibilă a sumei $x+x'+y+y'+z+z'$ este $3+11+61 = 75$.
Această valoare chiar se poate obţine, de exemplu dacă pe feţele cubului scriem, pe perechi de feţe opuse, numerele 1 şi 2, 5 şi 6, 11 şi 50.

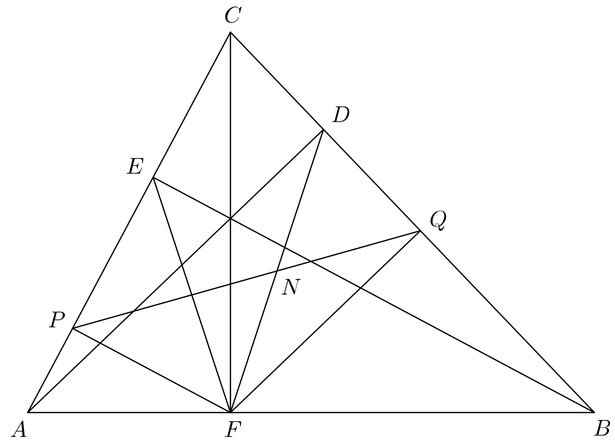
Remarcă: O variantă plană a acestei probleme s-a dat la Olimpiadă în Austria, în 2009.

Problema 4. În triunghiul ascuţitunghic ABC, punctele D, E, F sunt picioarele înălţimilor din A, B, respectiv C, iar P, Q sunt proiecţiile lui F pe AC, respectiv BC. Arătaţi că dreapta PQ intersectează segmentele $[DF]$ şi $[EF]$ în mijloacele acestora.

Turneul Oraşelor, 2011 [1]

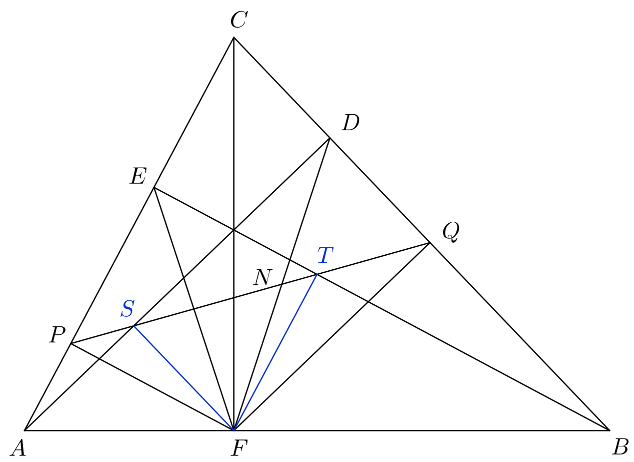
Soluţia 1:
Având unghiurile opuse drepte, deci suplementare, patrulaterul $CPFQ$ este inscriptibil. Deducem că $m(\angle PQF) = m(\angle ACF) = 90^\circ - m(\angle A)$, deci $m(\angle CQP) = 180^\circ - m(\angle PQF) - m(\angle FQB) = 180^\circ - 90^\circ + m(\angle A) - 90^\circ = m(\angle A)$. Dar şi patrulaterul $ACDF$ este inscriptibil (înscris în cercul de diametru $[AC]$), deci $m(\angle FDQ) = 180^\circ - m(\angle FDC) = m(\angle A)$. Dacă notăm cu N punctul în care dreapta PQ taie segmentul $[FD]$, avem că triunghiul DNQ este isoscel, deci N este intersecţia dintre mediatoarea catetei $[DQ]$ şi ipotenuza $[FD]$ a triunghiului dreptunghic FDQ, adică mijlocul lui $[FD]$.
Analog se arată că dreapta PQ trece şi prin mijlocul segmentului $[EF]$.

[1] Senior A-level, Fall



Observaţie: Ipoteza ABC-ascuţitunghic este inutilă; ea nu apare în enunţul original.

Soluţia 2:
Fie S şi T proiecţiile punctului F pe dreptele AD, respectiv BE. Vom arăta că punctele P, S, T, Q sunt coliniare.
Patrulaterele $FPET$ şi $FQDS$ sunt dreptunghiuri, iar $AFSP$ şi $BFTQ$ sunt patrulatere inscriptibile, înscrise în cercurile de diametre $[AF]$, respectiv $[BF]$. Atunci $m(\angle PSA) = m(\angle PFA) = 90^\circ - m(\angle A)$, iar $m(\angle DSQ) = m(\angle SQF) = m(\angle TQF) = m(\angle TBF) = 90^\circ - m(\angle A) = m(\angle PSA)$. Cum punctele P şi Q sunt în semiplane diferite determinate de AD, conform reciprocei teoremei unghiurilor opuse la vârf, rezultă că punctele P, S, Q sunt coliniare. Analog, P, T, Q sunt coliniare. În dreptunghiul $FPET$, diagonala $[PT]$ trece prin mijlocul diagonalei $[EF]$, iar în dreptunghiul $FQDS$, diagonala $[SQ]$ trece prin mijlocul diagonalei $[FD]$, de unde rezultă concluzia.


C
D
E
Q
T
N
S
P
A
F
B