Problema 1. Numerele naturale 22, 23, 24 au următoarea proprietate: în descompunerilor lor în factori primi fiecare factor apare la o putere impară: $22 = 2^1 \cdot 11^1$, $23 = 23^1$, $24 = 2^3 \cdot 3^1$. Care este cel mai mare număr de numere naturale consecutive care au această proprietate?

Olimpiadă URSS

Soluţie:
Vom demonstra că maximul căutat este 7.
Vom face acest lucru în doi paşi: mai întâi vom arăta că nu pot exista 8 (sau mai multe) numere naturale consecutive care să aibă proprietatea din enunţ, apoi vom demonstra că există într-adevăr 7 numere naturale consecutive cu proprietatea dată.
I. Printre oricare 8 numere naturale consecutive există unul de forma $8k+4$, $k \in \mathbb{N}$. În descompunerea în factori primi a acestui număr, factorul prim 2 va apărea la puterea a 2-a, adică pară, deci acest număr nu are proprietatea din enunţ.
II. Pentru a demonstra că există 7 numere naturale consecutive cu proprietatea din enunţ este suficient să dăm un exemplu. Acesta poate fi cel al numerelor $29 = 29^1$, $30 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$, $31 = 31^1$, $32 = 2^5$, $33 = 3^1 \cdot 11^1$, $34 = 2^1 \cdot 17^1$, $35 = 5^1 \cdot 7^1$.

Problema 2. Câte triplete (a, b, c) de numere naturale satisfac simultan relaţiile $abc + 2014 = ab + bc + ca$ şi $a + b + c = 2015$?

* * *

Soluţie:
Adunând cele două relaţii, obţinem $abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1 = 0$, ceea ce se scrie echivalent $(a-1)(b-1)(c-1) = 0$. Prin urmare (cel puţin) unul dintre numerele a, b, c trebuie să fie 1, în vreme ce celelalte două trebuie să aibă suma 2014.
Reciproc, orice triplet (a, b, c) de forma $(1, n, 2014 - n)$, cu $n \in \{0, 1, \ldots, 2014\}$ (şi permutări) satisface relaţiile din enunţ.
Cu $a = 1$ sunt 2015 soluţii, la fel tot 2015 soluţii cu $b = 1$ şi 2015 soluţii cu $c = 1$. Însă soluţiile care au două componente egale cu 1, anume $(1, 1, 2013)$, $(1, 2013, 1)$ şi $(2013, 1, 1)$, au fost numărate de câte două ori, deci în realitate sunt în total $3 \cdot 2015 - 3 = 6042$ soluţii.

Problema 3. Determinaţi numerele naturale n care au proprietatea că există un pătrat perfect care are suma cifrelor n.

* * *

Soluţia 1:
Vom demonstra că numerele căutate sunt cele care dau unul din resturile 0, 1, 4

sau 7 la împărţirea cu 9.

I. Mai întâi arătăm că orice număr care are proprietatea din enunţ trebuie să dea unul din resturile de mai sus la împărţirea cu 9.
• Deoarece $(3k)^2 = 9k^2 = M_9$, iar $(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = M_3 + 1$, un pătrat perfect poate da la împărţirea cu 9 doar unul din resturile 0, 1, 4 sau 7.
• Un număr dă acelaşi rest la împărţirea cu 9 ca şi suma cifrelor sale.
Într-adevăr, dacă $N = \overline{a_1 a_2 \dots a_j}$ atunci

$$N - (a_1 + a_2 + \dots + a_j) = \underbrace{99\dots9}_{j-1 \text{ cifre}} a_1 + \underbrace{99\dots9}_{j-2 \text{ cifre}} a_2 + \dots + 99a_{j-2} + 9a_{j-1}$$

este divizibil cu 9, deci N şi suma cifrelor sale dau acelaşi rest la împărţirea cu 9.
În concluzie, suma cifrelor unui pătrat perfect este un număr care dă unul din resturile 0, 1, 4 sau 7 la împărţirea cu 9.

II. Arătăm acum că, reciproc, orice număr care dă la împărţirea cu 9 unul din resturile 0, 1, 4 sau 7 poate fi suma cifrelor unui pătrat perfect.
1) Dacă $n = 9k$, putem lua numărul $10^k - 1$. Pentru $k = 0$ este evident că 0^2 are suma cifrelor 0. Pentru $k > 0$ avem că $(10^k - 1)^2 = 10^{2k} - 2 \cdot 10^k + 1 = \underbrace{99\dots9}_{k-1 \text{ cifre}} 8 \underbrace{00\dots0}_{k-1 \text{ cifre}} 1$ care are suma cifrelor $9k$.
2) Dacă $n = 9k + 1$, cu $k > 0$, putem lua numărul $10^k - 2$. Avem $(10^k - 2)^2 = 10^{2k} - 4 \cdot 10^k + 4 = \underbrace{99\dots9}_{k-1 \text{ cifre}} 6 \underbrace{00\dots0}_{k-1 \text{ cifre}} 4$ care are suma cifrelor $9k + 1$. Pentru $n = 1$ putem lua 1 (sau orice putere a lui 10).
3) Dacă $n = 9k + 4$, cu $k > 0$ putem lua numărul $10^k - 3$. Avem $(10^k - 3)^2 = 10^{2k} - 6 \cdot 10^k + 9 = \underbrace{99\dots9}_{k-1 \text{ cifre}} 4 \underbrace{00\dots0}_{k-1 \text{ cifre}} 9$ care are suma cifrelor $9k + 4$. Pentru $n = 4$ putem lua 2.
4) Dacă $n = 9k + 7$ putem lua numărul $10^{k+1} - 5$. Avem $(10^{k+1} - 5)^2 = 10^{2k+2} - 10^{k+2} + 25 = \underbrace{99\dots9}_{k \text{ cifre}} \underbrace{00\dots0}_{k \text{ cifre}} 25$ care are suma cifrelor $9k + 7$.
În concluzie, orice număr care dă unul din resturile 0, 1, 4 sau 7 la împărţirea cu 9 poate fi suma cifrelor unui pătrat perfect.

Soluţia 2: (*Patrick Dumitrescu*)
Ca la partea **I.** de mai sus se arată că numerele căutate trebuie să fie divizibile cu 9 sau să dea restul 1 la împărţirea cu 3. Pentru reciprocă, să observăm că

$$\underbrace{333\dots3}_{m \text{ ori}}5^2 = (\underbrace{333\dots3}_{m+1 \text{ ori}} + 2)^2 = \left(\frac{10^{m+1} - 1}{3} + 2\right)^2 = \left(\frac{10^{m+1} + 5}{3}\right)^2 =$$

$$\frac{10^{2m+2} + 10^{m+2} + 25}{9} = \frac{10^{2m+2} - 1}{9} + \frac{10^{m+2} - 1}{9} + 3 = \underbrace{111\dots1}_{2m+2 \text{ ori}} + \underbrace{111\dots1}_{m+2 \text{ ori}} + 3 =$$

$\underbrace{111\dots1}_{m \text{ ori}}\underbrace{222\dots2}_{m+1 \text{ ori}}5$, număr care are suma cifrelor $m + 2(m+1) + 5 = 3m + 7$. Obţinem aşadar pătrate perfecte pentru orice număr de forma $3k+1$ mai mare ca 4. Cum 1 şi 4 sunt pătrate perfecte, am obţinut că pentru orice număr n de forma $3k+1$ există pătrat perfect având suma cifrelor n. Mai observăm şi că

$\underbrace{333\dots3}_{m \text{ ori}}6^2 = (\underbrace{333\dots3}_{m+1 \text{ ori}}+3)^2 = \left(\frac{10^{m+1}-1}{3}+3\right)^2 = \left(\frac{10^{m+1}+8}{3}\right)^2 =$
$\frac{10^{2m+2}+16\cdot10^{m+1}+64}{9} = \frac{10^{2m+2}-1}{9} + 16\cdot\frac{10^{m+1}-1}{9} + 9 = \underbrace{111\dots1}_{2m+2 \text{ ori}}+16\cdot$
$\underbrace{111\dots1}_{m+1 \text{ ori}}+9 = \underbrace{111\dots1}_{2m+2 \text{ ori}}+1\underbrace{777\dots7}_{m \text{ ori}}6 + 9 = \underbrace{111\dots1}_{m \text{ ori}}2\underbrace{888\dots8}_{m-1 \text{ ori}}96$, număr care are suma cifrelor $m + 2 + 8(m-1) + 9 + 6 = 9m + 9$ (cu $m \geq 1$). Cum 0 şi 9 sunt pătrate perfecte, orice număr de forma $n = 9k$ poate fi suma cifrelor unui pătrat perfect, ceea ce încheie demonstraţia.

Problema 4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Perpendiculara din B pe AC intersectează cercul de diametru $[AC]$ în punctele P şi Q, iar perpendiculara din C pe AB intersectează cercul de diametru $[AB]$ în punctele R şi S. Demonstraţi că punctele P, Q, R, S sunt conciclice şi că centrul cercului care conţine aceste patru puncte este A.

* * *[1]

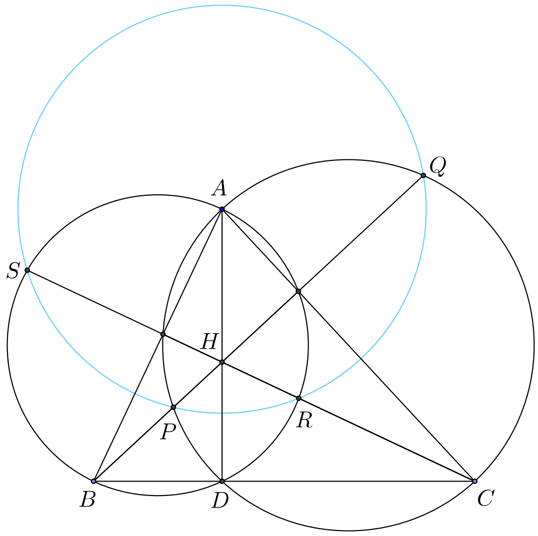
Soluţia 1:

Fie D piciorul înălţimii din A şi H ortocentrul triunghiului ABC.
Deoarece $m(\angle ADB) = 90°$, cercul de diametru $[AB]$ trece prin D. Scriind în două moduri puterea punctului H faţă de cercul de diametru $[AB]$ obţinem $HS \cdot HR = HA \cdot HD$. Analog, D se află şi pe cercul de diametru $[AC]$, iar din puterea lui H faţă de acest cerc rezultă $HP \cdot HQ = HA \cdot HD$. Prin urmare $HP \cdot HQ = HR \cdot HS$ şi, cum $H \in [PQ] \cap [RS]$, din reciproca teoremei puterii punctului (vezi Observaţia (4) de la pagina 2 din materialul teoretic), rezultă că punctele P, Q, R, S sunt conciclice.

Acelaşi lucru spus mai pe scurt: AD este axa radicală a cercurilor de diametre $[AB]$ şi $[AC]$, deci $H \in AD$ are aceeaşi putere faţă de cele două cercuri.

În plus, deoarece $[AB]$ este diametru şi $RS \perp AB$ rezultă că AB este mediatoarea lui $[RS]$. Analog, AC este mediatoarea lui $[PQ]$. Cum centrul cercului care trece prin P, Q, R, S trebuie să se afle atât pe mediatoarea lui $[PQ]$, cât şi pe cea a lui $[RS]$, rezultă că acest centru este $AB \cap AC = \{A\}$.

[1] Preluată de pe http://yufeizhao.com/olympiad/power_of_a_point_sol.pdf



Soluţia 2: (*schiţă*)

• Se arată uşor că $AP = AQ$ şi $AR = AS$.

• Unghiul $\angle ARB$ este înscris în semicercul de diametru $[AB]$, deci $m(\angle ARB) = 90^\circ$ (şi analog pentru $\angle APC$).

• Notând cu B', C' picioarele înălţimilor din B, respectiv C, din teorema catetei, $AP^2 = AB' \cdot AC$ şi $AR^2 = AC' \cdot AB$.

• Patrulaterul $BCB'C'$ fiind inscriptibil (în cercul de diametru $[BC]$), din puterea punctului A faţă de acest cerc rezultă $AB' \cdot AC = AC' \cdot AB$ adică $AP^2 = AR^2$, de unde $AQ = AP = AR = AS$ şi concluzia.

(În loc de inscriptibilitatea patrulaterului $BCB'C'$ şi puterea punctului se putea folosi asemănarea $\Delta\, AB'C' \sim \Delta\, ACB$ sau observa că $AB' \cdot AC = AB \cos A \cdot AC = AB \cdot AC'$.)