Problema 1. Se consideră mulţimea cu patru elemente $A = \{4,\ 15,\ 24,\ m\}$, unde $m \in \mathbb{N}$. Arătaţi că există $n,\ p \in A$, $n \neq p$, astfel încât numărul $n + p - 3$ nu este pătrat perfect.

Lucian Dragomir, lista scurtă, O.N.M. 2008

Soluţie: Observăm că $4 + 15 - 3$, $4 + 24 - 3$ şi $15 + 24 - 3$ sunt pătrate perfecte. Presupunem, prin reducere la absurd, că şi pentru celelalte perechi de numere diferite din A suma din enunţ este pătrat perfect, adică există $a,\ b,\ c \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\begin{cases} 4 + m - 3 = a^2 \\ 15 + m - 3 = b^2 \\ 24 + m - 3 = c^2 \end{cases} \quad \text{sau, echivalent,} \quad \begin{cases} a^2 = m + 1 \\ b^2 = m + 12 \\ c^2 = m + 21 \end{cases};$$

de aici rezultă imediat $b^2 - a^2 = 11$ şi $c^2 - b^2 = 9$. Din prima din aceste ecuaţii rezultă $(b - a)(b + a) = 11$ adică $b - a = 1$ şi $b + a = 11$, de unde $b = 6$, $a = 5$. Dar din a doua ecuaţie $c^2 = 9 + b^2 = 45$, contradicţie. (De altfel, $b = 6$ conduce la $m = 24$, ceea ce nu convine).

Observaţie: De fapt nicicare două dintre relaţiile $a^2 = m + 1$, $b^2 = m + 12$, $c^2 = m+21$ nu pot avea loc simultan pentru că cele două ar implica $m \in \{4,\ 15,\ 24\}$ ceea ce nu convine.
Există însă o (unică) valoare întreagă a lui m pentru care au loc simultan două dintre relaţiile de mai sus: $m = -12$.

Alte soluţii primite de la concurenţi:

Soluţia 2: (*Iulia Rebreanu*)
Un pătrat perfect poate da la împărţirea cu 7 numai unul dintre resturile 0, 1, 2 sau 4. Pentru fiecare din cazurile $m = M7$, $m = M7 + 1, \ldots,$ $m = M7 + 6$ se verifică uşor că cel puţin unul dintre numerele $m+4-3$, $m+15-3$ şi $m+24-3$ nu dă niciunul din resturile 0, 1, 2 sau 4 la împărţirea cu 7, prin urmare nu este pătrat perfect.

Soluţia 3: (*Ştefan Dominte, Andrei Grigoraş, Ştefania Ligia Jianu*, asemănătoare cu Soluţia 2, dar modulo 8)
Un pătrat perfect poate da la împărţirea cu 8 numai unul dintre resturile 0, 1 sau 4. Pentru fiecare din cazurile $m = M8$, $m = M8 + 1, \ldots,$ $m = M8 + 7$ se verifică uşor că cel puţin unul dintre numerele $m + 4 - 3$, $m + 15 - 3$ şi $m + 24 - 3$ nu dă niciunul din resturile 0, 1 sau 4 la împărţirea cu 8, prin urmare nu este pătrat perfect.
(Putem evita analizarea cazurilor observând că $m + 15 - 3$ şi $m + 24 - 3$ dau la împărţirea cu 8 resturi consecutive. Ca să fie pătrate perfecte ar trebui ca aceste

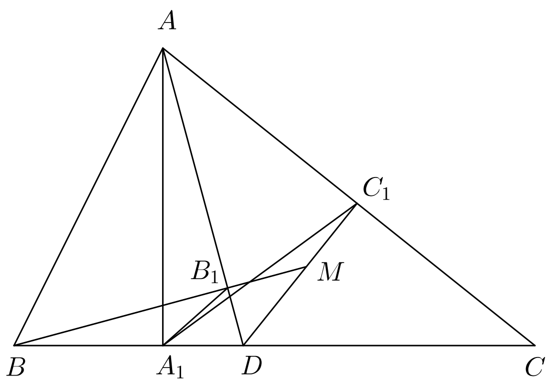
resturi să fie 0 şi 1, adică $m = M8 + 4$, caz în care însă $m + 4 - 3 = M8 + 5$ nu poate fi pătrat perfect.)

Problema 2. Fie un triunghi ABC ($AB < AC$), A_1 şi D intersecţiile înălţimii, respectiv bisectoarei din A cu BC. Fie B_1 proiecţia lui B pe AD şi C_1 proiecţia lui D pe AC. Arătaţi că punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare.

din cartea *Probleme calitative de geometrie plană*, de Maria Elena Panaitopol şi Laurenţiu Panaitopol[1]

Soluţia 1: Patrulaterul ABA_1B_1 este înscris în cercul de diametru $[AB]$, iar patrulaterul AA_1DC_1 este înscris în cercul de diametru $[AD]$, deci $m(\angle B_1A_1D) = m(\angle BAD) = m(\angle DAC) = m(\angle C_1A_1D)$ de unde rezultă concluzia.

Soluţia 2: Fie $\{M\} = BB_1 \cap DC_1$. Deoarece $\angle ABB_1 \equiv \angle ADM$ (complementare cu unghiurile congruente $\angle BAD$, respectiv $\angle DAC$), patrulaterul $ABDM$ este inscriptibil. Atunci, conform teoremei lui Simson, proiecţiile lui A pe dreptele suport ale laturilor triunghiului BDM sunt coliniare. Aceste proiecţii sunt chiar A_1, B_1, C_1.



Problema 3. Arătaţi că dacă a şi b sunt numere naturale nenule cu proprietatea a^n divide b^{n+1} pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci a divide b.

* * *

Soluţia 1: (dată de *Alexandru Mihalcu, Paul Cristian Iacob, Ştefania Sabou şi Andreea Rotaru*)

[1] Editura Gil, 1996

Fie $d = (a, b)$ şi $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = dx$, $b = dy$, $(x, y) = 1$. Din $a^n \mid b^{n+1}$, $\forall n$, rezultă $d^n x^n \mid d^{n+1} y^{n+1}$, $\forall n$, adică $x^n \mid d y^{n+1}$, $\forall n$. Cum însă $(x, y) = 1$, de aici rezultă $x^n \mid d$, $\forall n$, adică $x^n \leq d$, $\forall n$. Deoarece orice număr natural $x > 1$ are puteri oricât de mari, adică şi puteri mai mari decât d, obţinem că $x = 1$, adică $a = d$, deci $a \mid b$.

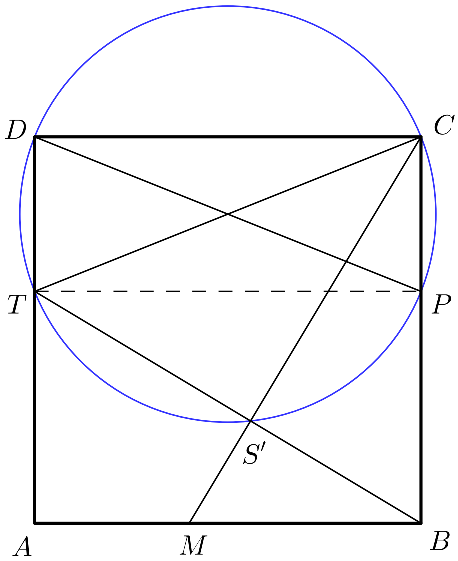
Soluţia 2: Dacă $a = 1$ afirmaţia din enunţ este evidentă. În continuare presupunem $a \geq 2$. Din $a \mid b^2$ rezultă că orice factor prim al lui a este şi factor prim al lui b. Mai rămâne să arătăm că, pentru orice factor prim p al lui a, exponentul lui p din descompunerea în factori primi a lui a este mai mic sau egal decât exponentul lui p din descompunerea în factori primi a lui b. Fie p un factor prim al lui a, α exponentul lui p din descompunerea în factori primi a lui a şi β exponentul lui p din descompunerea în factori primi a lui b. Din $a^n \mid b^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ rezultă $\alpha n \leq \beta(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, adică $\dfrac{\alpha}{\beta} \leq \dfrac{n+1}{n}$, sau, scăzând 1, $\dfrac{\alpha - \beta}{\beta} \leq \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dacă $\alpha > \beta$, ar rezulta $n \leq \dfrac{\beta}{\alpha - \beta}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ceea ce este absurd (există numere naturale oricât de mari). Prin urmare $\alpha \leq \beta$, ceea ce trebuia demonstrat.

Problema 4. Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctele $M \in (AB)$, $P \in (BC)$ astfel încât
$AM = CP$. Cercul de diametru $[DP]$ intersectează (CM) în punctul S.
Arătaţi că $MS \perp BS$.

Manuela Prajea

Soluţie: Ducem $BS' \perp MC$, $S' \in MC$ şi demonstrăm că S' este pe cercul de diametru $[DP]$, deci coincide cu S, de unde va rezulta concluzia.

Pentru aceasta, prelungim BS' şi considerăm $\{T\} = AD \cap BS'$. Unghiurile $\angle TBA$ şi $\angle BCM$ sunt congruente deoarece au acelaşi complement, $\angle BMC$. Atunci triunghiurile ABT şi BCM sunt congruente (catetă-unghi), deci $AT = BM$, de unde $DT = AM = CP$. Rezultă că patrulaterul $CDTP$ este dreptunghi, deci cercul de diametru $[DP]$ coincide cu cercul de diametru $[CT]$. Dar, cum $m(\angle TS'C) = 90°$, S' aparţine acestui cerc, deci coincide cu S. Prin urmare, $MS \perp BS$.



D
C
T
P
S'
A
M
B