Problema 1. Un număr natural se numeşte *grozav* dacă el este mai mic decât orice alt număr natural care are aceeaşi sumă a cifrelor. Câte numere de trei cifre sunt *grozave*?

Olimpiadă Cehia, 2011

Soluţie:
Un număr de trei cifre are suma cifrelor cuprinsă între 1 şi 27. Dacă suma cifrelor este mai mică sau egală cu 18, atunci există şi un număr de două cifre, aşadar mai mic, care are aceeaşi sumă a cifrelor, deci numărul de trei cifre nu este *grozav*. Numerele *grozave* de trei cifre au suma cifrelor cuprinsă între 19 şi 27. Ele sunt: 199 (pentru suma cifrelor 19), 299 (pentru suma cifrelor 20), ş.a.m.d., 999 (pentru suma cifrelor 27). Aşadar sunt 9 numere *grozave* de 3 cifre.

Problma 2. Determinaţi numerele naturale a şi b pentru care ecuaţia

$$|\, ax + b\,| + |\, ax - b\,| = 100$$

are exact trei soluţii în mulţimea numerelor întregi.

Andrei Eckstein

Soluţie: Dacă $a = 0$ ecuaţia devine $2b = 100$ care are o infinitate de soluţii întregi dacă $b = 50$ şi niciuna dacă $b \neq 50$. În continuare presupunem că $a \neq 0$.

• Dacă $x < -\frac{b}{a} \leq 0$, ecuaţia revine la $-2ax = 100$, adică $x = -\frac{50}{a} < -\frac{b}{a}$ dacă $b < 50$, deci în acest caz ecuaţia are cel mult o soluţie.

• La fel, dacă $x > \frac{b}{a} \geq 0$, ecuaţia revine la $2ax = 100$, adică $x = \frac{50}{a} > \frac{b}{a}$ dacă $b < 50$, deci şi în acest caz ecuaţia are cel mult o soluţie.

• În fine, în cazul $x \in \left[-\frac{b}{a}\ \frac{b}{a}\right]$, ecuaţia revine la $2b = 100$, adică $b = 50$, care este verificată de orice $x \in \left[-\frac{b}{a}\ \frac{b}{a}\right]$.

Deoarece în celelalte cazuri nu se obţin decât cel mult două soluţii, trebuie ca şi în acest caz să avem cel puţin o soluţie, prin urmare este necesar ca $b = 50$. În acest caz soluţiile găsite în cazurile precedente nu convin (trebuia $b < 50$), deci mulţimea soluţiilor întregi ale ecuaţiei este $\left[-\frac{b}{a}\ \frac{b}{a}\right] \cap \mathbb{Z}$, unde $b = 50$. Pentru ca această mulţime să aibă exact 3 elemente trebuie ca $1 \leq \frac{b}{a} < 2$, adică $25 < a \leq 50$. Într-adevăr, pentru $a \in \{26, 27, \ldots, 50\}$ şi $b = 50$, ecuaţia din enunţ are trei soluţii întregi: -1, 0 şi 1.

Problema 3. Determinaţi numerele întregi n pentru care există numere prime p şi q astfel încât

$$p(p+1) - q(q+2) = n(n+3).$$

Adriana şi Lucian Dragomir

Soluţie:
Deoarece $p(p+1)$ şi $n(n+3)$ sunt numere pare, rezultă că şi $q(q+2)$ este par, deci q este par. Fiind şi prim, rezultă $q = 2$. Ajungem astfel la $p(p+1) - 8 = n(n+3)$. Înmulţim această ecuaţie cu 4 şi o scriem $(4p^2+4p+1)-1-32 = (4n^2+12n+9)-9$, adică $(2p+1)^2-(2n+3)^2 = 24$. Obţinem că $(2p+1+2n+3)(2p+1-2n-3) = 24$, sau $(p+n+2)(p-n-1) = 6$. Cei doi factori trebuie să aibă acelaşi semn şi suma $2p+1 > 0$, deci ei trebuie să fie pozitivi. Avem patru variante:
I. $p+n+2 = 1$, $p-n-1 = 6$ care conduce la $p = 3$ (prim) şi $n = -4$;
II. $p+n+2 = 6$, $p-n-1 = 1$ care conduce la $p = 3$ (prim) şi $n = 1$;
III. $p+n+2 = 2$, $p-n-1 = 3$ care conduce la $p = 2$ (prim) şi $n = -2$;
IV. $p+n+2 = 3$, $p-n-1 = 2$ care conduce la $p = 2$ (prim) şi $n = -1$.
Aşadar numerele căutate sunt $n = -4$, $n = -2$, $n = -1$ şi $n = 1$.

Problema 4. Pe segmentul $[AD]$ de lungime 90 cm se consideră punctele B şi C astfel încât $AB = BC = CD$. Tangenta din A la cercul de diametru $[CD]$ intersectează cercul de diametru $[BC]$ în punctele E şi F. Aflaţi lungimea segmentului $[EF]$.

Concurs AHSME, SUA, 1982, enunţ modificat

Soluţie:
Fie M, N mijloacele segmentelor $[BC]$, respectiv $[CD]$, G punctul de tangenţă al tangentei din A la cercul de diametru $[CD]$ şi H mijlocul lui $[EF]$. Atunci $NG \perp AG$ (raza este perpendiculară pe tangentă) şi $MH \perp AG$ (perpendiculara din centrul cercului cade în mijlocul coardei). Aşadar avem $MH \parallel NG$, de unde $\dfrac{MH}{NG} = \dfrac{AM}{AN}$, adică $\dfrac{MH}{15} = \dfrac{45}{75}$. Deducem că $MH = 9\,\text{cm}$.
Apoi, din triunghiul dreptunghic MHE, cu teorema lui Pitagora, avem $HE^2 = ME^2 - MH^2 = 15^2 - 9^2 = 144$, deci $HE = 12\,\text{cm}$. Rezultă că $EF = 24\,\text{cm}$.