Problema 1. Aflaţi numerele prime p pentru care numărul $p^2 + 11$ are exact 6 divizori pozitivi distincţi.

Olimpiadă Rusia, 2005

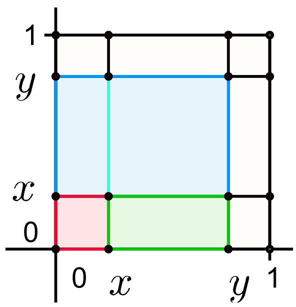
Soluţie:
Orice număr prim p mai mare ca 3 este de forma $p = 6k \pm 1$, caz în care $p^2 + 11 = (6k \pm 1)^2 + 11 = 36k^2 \pm 12k + 12$ este divizibil cu 12, deci are cel puţin divizorii 1, 2, 3, 4, 6, 12. Fiind totodată mai mare strict decât 12, un asemenea număr nu poate avea exact 6 divizori pozitivi.
Rămân de studiat cazurile $p = 2$ şi $p = 3$. Pentru $p = 2$ avem $p^2 + 11 = 15$ care are numai 4 divizori, iar pentru $p = 3$ avem $p^2 + 11 = 20 = 2^2 \cdot 5$ care convine.
Aşadar $p = 3$ este singurul număr prim cu proprietatea din enunţ.

Problema 2. a) Aflaţi valoarea maximă a expresiei $x^2 - xy + y^2$ când $x, y \in [0, 1]$. Pentru ce valori ale lui x şi y se atinge această valoare maximă?
b) Aflaţi valoarea maximă a expresiei $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ când $x, y, z \in [0, 1]$. Pentru ce valori ale lui x, y şi z se atinge această valoare maximă?

* * *

Soluţia 1: a) Din motive de simetrie putem presupune $x \geq y$. Atunci $x^2 - xy + y^2 = y(y - x) + x^2 \leq x^2 \leq 1$, cu egalitate dacă $x = 1$ şi $y(y - x) = 0$ adică $y \in \{0, 1\}$. Aşadar, renunţând la condiţia $x \geq y$, deducem că valoarea maximă este 1 şi se atinge când $(x, y) \in \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.
b) Putem presupune $z \leq y \leq x$. Atunci $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = x^2 - xy + y^2 + z(z - x - y) \leq x^2 - xy + y^2 \leq 1$, cu egalitate dacă $z = 0$ şi $(x, y) \in \{(0, 1), (1, 1)\}$. Aşadar, conform punctului a), maximul este 1 şi se atinge dacă $x, y, z \in \{0, 1\}$, x, y, z nu toate trei egale.

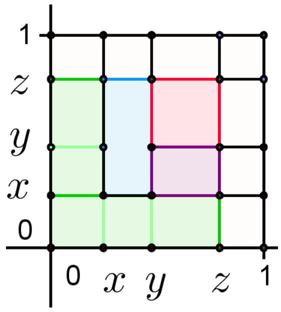
Soluţia 2: (cu interpretare grafică)



a) Din motive de simetrie putem presupune $x \leq y$. Atunci $x^2 - xy + y^2 = y(y - x) + x^2$. Primul termen reprezintă aria dreptunghiului albastru din figură, iar cel de-al doilea termen reprezintă aria pătratului roşu. Evident, suma celor două arii este cel mult 1 (aria pătratului de latură 1). Pentru ca suma celor două arii să fie maximă, adică 1, trebuie ca zona albă din interiorul pătratului să nu existe (adică $y = 1$) şi aria dreptunghiului verde să fie tot 0, adică fie $y - x = 0$, fie $x = 0$.
Obţinem în acest caz ($x \leq y$) variantele $x = 0$, $y = 1$ şi $x = y = 1$. În final,

maximul căutat este 1 şi se atinge pentru perechile $(x, y) \in \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

b) Putem presupune $x \le y \le z$. Rescriem expresia $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = (z - x)(y - x) + (z - y)^2$. Primul termen reprezintă aria dreptunghiului albastru din figură, iar cel de-al doilea termen reprezintă aria pătratului roşu. Evident, suma celor două arii este cel mult 1 (aria pătratului de latură 1). Pentru ca suma celor două arii să fie maximă, adică 1, trebuie ca zona albă din interiorul pătratului să nu existe, zona verde să nu existe şi zona mov să nu existe.



Pentru ca zona albă să nu existe trebuie $z = 1$. Pentru ca zona verde să nu existe trebuie $x = 0$, iar pentru ca zona mov să nu existe trebuie ca $(z - y)(y - x) = 0$, adică $y = z = 1$ sau $y = x = 0$. Prin urmare maximul este 1 şi este atins în acest caz în două variante: $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ şi $(x, y, z) = (0, 1, 1)$. În final, renunţând la condiţia $x \le y \le z$, maximul este atins pentru $x, y, z \in \{0, 1\}$, nu toate trei egale (6 soluţii).

Problema 3. Două armate, A şi B, sunt angajate într-un război cu un număr total de 1000 de soldaţi. Cele două armate se atacă alternativ. La orice atac, fiecare soldat viu al armatei care atacă împuşcă un soldat din armata adversă. (Soldaţi diferiţi împuşcă soldaţi diferiţi, iar soldaţii împuşcaţi nu mai participă în continuare la război.) Războiul s-a încheiat (nu neapărat prin eliminarea uneia dintre părţi) după trei atacuri: mai întâi a atacat A, apoi B şi la sfârşit din nou A. Care este cel mai mic număr posibil de supravieţuitori?

Concursul Náboj, Cehia şi Slovacia, 2011

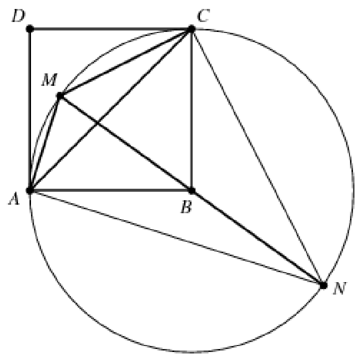
Soluţie:
Pentru ca de fiecare dată soldaţii din armata care atacă să poată împuşca soldaţi diferiţi trebuie ca armata care atacă să aibă mereu cel mult la fel de mulţi soldaţi ca şi armata opusă.
Dacă armata A are n soldaţi iar armata B are $1000 - n$ soldaţi, trebuie ca $n \le 500$.
După primul atac al armatei A în armata B vor rămâne $1000 - 2n$ soldaţi.
Armata B, care a rămas cu $1000 - 2n$ soldaţi, atacă armata A care are n soldaţi, deci, potrivit observaţiei de la început, trebuie ca $1000 - 2n \le n$, adică $n \ge 334$.
Armata A va rămâne cu $n - (1000 - 2n) = 3n - 1000$ soldaţi.
Armata A, cu $3n - 1000$ soldaţi, atacă armata B, care numără $1000 - 2n$ soldaţi. Trebuie aşadar ca $3n - 1000 \le 1000 - 2n$, adică $n \le 400$. După atac, din armata B rămân $1000 - 2n - (3n - 1000) = 2000 - 5n$ supravieţuitori.
Numărul total de supravieţuitori este $(3n - 1000) + (2000 - 5n) = 1000 - 2n$ care este minim atunci când n este maxim, adică pentru $n = 400$.
În acest caz războiul va fi supravieţuit de 200 de soldaţi.
Într-adevăr, dacă A are 400 de soldaţi care atacă armata B care are 600, după primul atac armata B rămâne cu 200 de soldaţi; la al doilea atac armata A rămâne

şi ea cu 200 de soldaţi care, la cel de-al treilea atac, lichidează toată armata B. Supravieţuiesc astfel 200 de soldaţi din armata A.

Problema 4. Fie M un punct în interiorul pătratului $ABCD$ astfel încât $m(\angle DCM) = m(\angle MAC) = 25°$. Aflaţi măsura unghiului ABM.

Concursul KöMaL, decembrie 2008 [1]

Soluţia 1: (soluţia oficială din KöMaL)
Evident $m(\angle ACM) = 45° - m(\angle DCM) = 20°$, astfel că $m(\angle AMC) = 135°$. Cercul cu centrul în B şi rază AB intersectează semidreapta $(MB$ într-un punct N. Arcul AC are măsura de $90°$, deci $m(\angle ANC) = 45° = 180° - m(\angle AMC)$, de unde rezultă că patrulaterul $ANCM$ este inscriptibil şi deci $m(\angle ABM) = 2m(\angle ANM) = 2m(\angle ACM) = 40°$.



Variantă: Se consideră N simetricul lui A faţă de B. Ca la soluţia de mai sus rezultă că $ANCM$ este inscriptibil, de unde $m(\angle AMN) = m(\angle ACN) = 90°$, deci $[MB]$ este mediană în triunghiul dreptunghic AMN. Atunci triunghiul ABM este isoscel, cu $m(\angle BAM) = 70°$, de unde rezultă imediat concluzia.

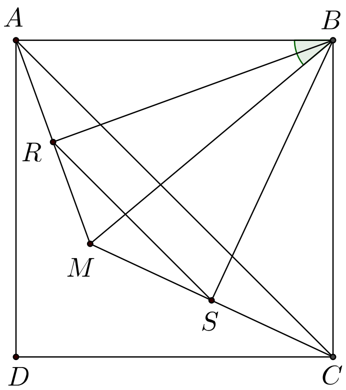
Soluţia 2:
Fie M' în interiorul pătratului astfel încât $BM' = AB$ şi $m(\angle ABM') = 40°$. Din triunghiurile isoscele ABM' şi BCM' obţinem imediat că $m(\angle BAM') = 70°$, $m(\angle BCM') = 65°$, deci $m(\angle DCM') = m(\angle M'AC) = 25°$. Deducem că punctele M şi M' coincid, deci $m(\angle ABM) = 40°$.

Comentariu: O astfel de soluţie ne poate trece prin cap numai după ce ,,ghicim" că răspunsul este $40°$. Acest fapt poate fi făcut uşor realizând o figură exactă şi citind cu raportorul măsura unghiului cerut.

Soluţia 3:
Fie $[BR$ şi $[BS$ bisectoarele unghiurilor $\angle MBA$, respectiv $\angle MBC$, cu $R \in AM$, $S \in MC$. Ca mai sus se arată imediat că $m(\angle AMC) = 135°$. Cum $m(\angle RBS) =$

[1] de asemenea, Bundeswettbewerb Mathematik, Germania, 2013

$45°$, patrulaterul $RMSB$ este inscriptibil. Notând $m(\angle ABR) = m(\angle MBR) = x$ şi $m(\angle MBS) = m(\angle SBC) = y$, obţinem că $m(\angle MSR) = x$ şi $m(\angle MRS) = y$. Din teorema bisectoarei, $\frac{AR}{RM} = \frac{AB}{BM} = \frac{CB}{BM} = \frac{CS}{SM}$, deci, conform reciprocei teoremei lui Thales, $RS \parallel AC$. Rezultă că $x = 20°$ (şi $y = 25°$), deci $m(\angle ABM) = 2x = 40°$.



Soluţia 4: (*Patrick Dumitrescu*)
Fie $\{R\} = BD \cap MC$. Cum BD este mediatoarea lui $[AC]$, triunghiul RAC este isoscel, deci $m(\angle RAC) = m(\angle RCA) = 20°$. Din triunghiul MAC rezultă imediat că $m(\angle AMC) = 135°$, deci $m(\angle AMR) + m(\angle ABR) = 135° + 45° = 180°$. Prin urmare patrulaterul $AMRB$ este inscriptibil, de unde $m(\angle ABM) = m(\angle ARM) = 180° - m(\angle ARC) = m(\angle RAC) + m(\angle RCA) = 40°$.