**Problema 1.** Care este cel mai mare număr natural par care nu se poate scrie ca suma a două numere compuse impare?

*Concurs SUA,* 1984

Soluţia 1:

Observăm că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, numărul $6k + 9 = 3(2k + 3)$ este un număr compus impar. Un număr par $n$ poate da la împărţirea cu 6 unul dintre resturile: 0, 2, 4.

Dacă $n = 6m$, $m \in \mathbb{N}$ cu $m \geq 3$, putem scrie $n = 6m = \big(6(m-3)+9\big)+9$ adică sub forma unei sume de două numere compuse impare. Despre celelalte numere de această formă, anume 0, 6 şi 12, se verifică prin încercări că nu se scriu ca suma a două numere compuse impare (cel mai mic număr compus impar fiind 9, acest lucru este evident).
Dacă $n = 6m+2$, $m \in \mathbb{N}$ cu $m \geq 7$, putem scrie $n = 6m+2 = \big(6(m-7)+9\big)+35$ adică sub forma unei sume de două numere compuse impare. Despre celelalte numere de această formă, anume 2, 8, 14, 20, 26, 32 şi 38, se verifică prin încercări că nu se scriu ca suma a două numere compuse impare.
Dacă $n = 6m+4$, $m \in \mathbb{N}$ cu $m \geq 5$, putem scrie $n = 6m+4 = \big(6(m-5)+9\big)+25$ adică sub forma unei sume de două numere compuse impare. Despre celelalte numere de această formă, anume 4, 10, 16, 22, şi 28, se verifică prin încercări că nu se scriu ca suma a două numere compuse impare.
Aşadar numerele naturale pare care nu se scriu ca sumă de două numere compuse impare sunt: 0,2,4,6,8,10,12,14,16,20,22,26,28,32 şi 38, ultimul fiind numărul căutat.

Soluţia 2:

Observăm că orice număr de forma $5(2k + 1)$, $k \in \mathbb{N}^*$ este compus şi impar. Un număr par $n$ poate avea ultima cifră, $u(n)$, 0,2,4,6 sau 8.
Dacă $u(n) = 0$ şi $n \geq 30$ atunci $n = 10m$ cu $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, deci $n = 10m = 15 + (10m - 15) = 15 + 5(2m - 3)$ e sumă de două numere compuse impare. Despre celelalte numere de această formă, anume 0, 10 şi 20, se verifică prin încercări că nu se scriu ca suma a două numere compuse impare.
Dacă $u(n) = 2$ şi $n \geq 42$ atunci $n = 10m+2$ cu $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 4$, deci $n = 10m+2 = 27 + (10m - 25) = 27 + 5(2m - 5)$ e sumă de două numere compuse impare. Despre celelalte numere de această formă, anume 2, 12, 22 şi 32, se verifică prin încercări că nu se scriu ca suma a două numere compuse impare.
Dacă $u(n) = 4$ şi $n \geq 24$ atunci $n = 10m+4$ cu $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, deci $n = 10m+4 = 9 + (10m - 5) = 9 + 5(2m - 1)$ e sumă de două numere compuse impare. Despre celelalte numere de această formă, anume 4 şi 14, se verifică prin încercări că nu se scriu ca suma a două numere compuse impare.
Dacă $u(n) = 6$ şi $n \geq 36$ atunci $n = 10m+6$ cu $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, deci $n = 10m+6 = 21 + (10m - 15) = 21 + 5(2m - 3)$ e sumă de două numere compuse impare. Despre

celelalte numere de această formă, anume 6, 16, şi 26, se verifică prin încercări că nu se scriu ca suma a două numere compuse impare.
Dacă $u(n) = 8$ şi $n \geq 48$ atunci $n = 10m+8$ cu $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 4$, deci $n = 10m+8 = 33+(10m-25) = 33+5(2m-5)$ e sumă de două numere compuse impare. Despre celelalte numere de această formă, anume 8, 18, 28 şi 38, se verifică prin încercări că nu se scriu ca suma a două numere compuse impare.
Din nou, examinând lista numerelor pare care nu se scriu ca suma a două numere compuse impare, găsim că 38 este cel mai mare număr cu această proprietate.

**Problema 2.** Un dreptunghi $2010 \times 1000$ este împărţit în pătrăţele unitate. Construim una din diagonalele dreptunghiului. Câte pătrăţele unitate traversează diagonala?
(Pătrăţelele care au un singur punct comun cu diagonala nu vor fi numărate.)

$* \; * \; *$

<u>*Soluţie*</u>:

Să presupunem că diagonala uneşte colţul din stânga jos al dreptunghiului cu colţul din dreapta sus şi că parcurgem această diagonală pornind din colţul din stânga jos. Fie $A$ mulţimea pătratelor unitate pe care diagonala le traversează şi pe care le părăseşte prin latura de sus a acestora, iar $B$ mulţimea pătratelor unitate pe care diagonala le traversează şi pe care le părăseşte prin latura din dreapta a acestora. Numărul căutat este $Card(A \cup B) = Card\,A + Card\,B - Card(A \cap B)$.
În drumul ei, diagonala va traversa 2010 linii orizontale, deci va părăsi 2010 pătrate unitate prin latura de sus a acestora. Aşadar $Card\,A = 2010$. (Fiecare traversare a unei linii orizontale corespunde unei schimbări de pătrăţel.) Similar, în drumul ei, diagonala va traversa 1000 de linii verticale, deci va părăsi 1000 de pătrate unitate prin latura din dreapta a acestora. Aşadar $Card\,B = 1000$.
Mai trebuie să evaluăm $Card(A \cap B)$. $A \cap B$ reprezintă mulţimea pătratelor unitate pe care diagonala le părăseşte prin colţul din dreapta sus al acestora. Dacă diagonala traversează simultan linia orizontală cu numărul $n$ şi linia verticală cu numărul $m$ atunci avem (din teorema fundamentală a asemănării) că

$$\frac{n}{2010} = \frac{m}{1000}\,.$$

Deducem că $100n = 201m$ şi, cum $(100, 201) = 1$, rezultă $m = 100k$, apoi $n = 201k$. Deoarece $0 < n \leq 2010$ şi $0 < m \leq 1000$, deducem că $k \in \{1, 2, ..., 10\}$, deci sunt 10 pătrate pe care diagonala le părăseşte prin colţul din dreapta sus. Aşadar $Card(A \cap B) = 10$ şi $Card(A \cup B) = 2010 + 1000 - 10 = 3000$.

**Problema 3.** Aflaţi cea mai mare valoare a lui $k$ pentru care numărul $3^{11}$ se poate scrie ca o sumă de $k$ numere naturale consecutive.

*Concurs SUA,* 1987

<u>*Soluţie*</u>:

Dacă notăm cu $n$ cel mai mic dintre cele $k$ numere, trebuie ca

$$n + (n+1) + (n+2) + ... + (n+k-1) = 3^{11},$$

adică $\underbrace{(n+n+n+...+n)}_{k \text{ termeni}} + \big(1+2+3+...+(k-1)\big) = 3^{11}$, sau $kn + \dfrac{(k-1)k}{2} = 3^{11}$,

adică $k(2n+k-1) = 2 \cdot 3^{11}$.

Dacă $k$ este par atunci $k = 2 \cdot 3^m$ şi $2n+k-1 = 3^{11-m}$. Cum $k < 2n+k-1$, rezultă $m \le 5$, deci cel mai mare $k$ par este $2 \cdot 3^5 = 486$. (În acest caz $n = \dfrac{3^5+1}{2} = 122$.)

Dacă $k$ este impar atunci $k = 3^m$ şi $2n+k-1 = 2 \cdot 3^{11-m}$. Cum $k < 2n+k-1$, rezultă $m \le 5$, deci cel mai mare $k$ impar este $k = 3^5 = 243$. (În acest caz $n = \dfrac{5 \cdot 3^5 + 1}{2} = 608$.)

Comparând valorile găsite în cele două cazuri, vedem că cel mai mare $k$ cu proprietatea cerută este $k = 486$.