

**Problema 1.** Fie 9 numere naturale care îl divid pe  $30^{2009}$ . Arătați că există două dintre acestea având produsul pătrat perfect.

*Bogdan Vioreanu, problema C.O:4997 din GM nr. 1/2009*

**Soluție:** (preluată din GM nr. 7-8-9/2009)

Fie  $x_i$  cu  $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$  divizori ai lui  $30^{2009}$ . Cum  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ , rezultă că  $x_i = 2^{m_i} \cdot 3^{n_i} \cdot 5^{p_i}$ , cu  $m_i, n_i, p_i \in \{0, 1, \dots, 2009\}$  și  $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$ . Cum resturile la împărțirea cu 2 sunt 0 sau 1 și există 8 triplete cu componentele 0 sau 1, rezultă că există 2 triplete  $(m_i, n_i, p_i)$  și  $(m_j, n_j, p_j)$  astfel încât numerele  $m_i + m_j, n_i + n_j$  și  $p_i + p_j$  sunt toate pare. Notând  $m_i + m_j = 2m, n_i + n_j = 2n, p_i + p_j = 2p$ , rezultă că  $x_i \cdot x_j = 2^{2m} \cdot 3^{2n} \cdot 5^{2p} = (2^m \cdot 3^n \cdot 5^p)^2$ , de unde obținem concluzia.

**Problema 2.** Fie  $a$  un număr real. Arătați că aria triunghiului cu lungimile laturilor  $\sqrt{a^2 - a + 1}, \sqrt{a^2 + a + 1}, \sqrt{4a^2 + 3}$  nu depinde de  $a$ .

*Marcel Chiriță, problema C.O:5013. din GM nr. 3/2009*

**Soluție:** (preluată din GM nr. 7-8-9/2009)

Fie  $AB = \sqrt{a^2 - a + 1}, AC = \sqrt{a^2 + a + 1}$  și  $BC = \sqrt{4a^2 + 3}$ . Atunci

$$\cos A = \frac{-(2a^2 + 1)}{2\sqrt{(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)}} = \frac{-(2a^2 + 1)}{2\sqrt{a^4 + a^2 + 1}}, \text{ deci}$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{a^4 + a^2 + 1}}. \text{ Obținem:}$$

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{AB \cdot AC \sin A}{2} = \frac{\sqrt{a^2 - a + 1} \cdot \sqrt{a^2 + a + 1}}{2} \sin A = \\ &= \frac{\sqrt{a^4 + a^2 + 1}}{2} \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

**Problema 3.** Arătați că ecuația  $x^{10} + y^{10} = 2010z^{10}$  nu poate avea în mulțimea numerelor întregi decât soluția  $x = y = z = 0$ .

*Călin Gasparic*

**Soluție:** Fie  $(x, y, z)$  o soluție a ecuației, cu  $x, y, z$  numere întregi. Dacă  $z = 0$  atunci rezultă  $x = y = 0$ . Pentru  $z \neq 0$  avem  $x \neq 0$  și  $y \neq 0$ ; în caz contrar se ajunge la contradicție. Se știe că „suma a două pătrate perfecte se divide cu 3 dacă și numai dacă fiecare dintre ele se divide cu 3”. Cum 2010 se divide cu 3, iar  $x^{10}$  și  $y^{10}$  sunt pătrate perfecte rezultă că  $x = 3x_1, y = 3y_1$  cu  $0 < x_1 < x$  și  $0 < y_1 < y$ . Cu acestea ecuația devine  $3^{10}x_1^{10} + 3^{10}y_1^{10} =$

$2010z^{10}$ , iar după împărțirea la 3 obținem  $3^9x_1^{10} + 3^9y_1^{10} = 670z^{10}$ . De aici deducem că  $z = 3z_1$  cu  $0 < z_1 < z$  și ecuația devine  $3^9x_1^{10} + 3^9y_1^{10} = 670 \cdot 3^{10}z_1^{10}$  sau  $x_1^{10} + y_1^{10} = 2010z_1^{10}$ . Procedând asemănător obținem  $x_2^{10} + y_2^{10} = 2010z_2^{10}$  cu  $0 < x_2 < x_1 < x$ ,  $0 < y_2 < y_1 < y$ ,  $0 < z_2 < z_1 < z$ . Procedul se poate aplica de o infinitate de ori ceea ce presupune că există o infinitate de numere naturale mai mici decât un număr natural dat. Contradicție. În concluzie nu avem decât soluția  $x = y = z = 0$ .

**Problema 4.** Fie  $ABC$  un triunghi ascuțitunghic în care  $M$  și  $N$  sunt mijloacele laturilor  $[AB]$ , respectiv  $[AC]$ , iar  $S \in (BC)$  un punct mobil. Arătați că  $(MB - MS)(NC - NS) \leq 0$ . În ce caz avem egalitate ?

*Gheorghe Szöllősy*

**Soluție:** Notăm  $P(S) = (MB - MS)(NC - NS)$  și  $D$  piciorul perpendicularei din  $A$  pe  $BC$ . Avem evident  $MB = MD$  și  $CN = DN$ . Dacă  $S \in (BD)$  avem  $MB > MS$  și  $NC < NS$ , deci  $P(S) < 0$ . Dacă  $S \in (DC)$  avem  $MB < MS$  și  $NC > NS$ , deci  $P(S) < 0$ . Egalitatea are loc dacă  $S = D$ .