Problema 1. Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive astfel ca

$$\frac{x^2+xy}{y}=\frac{y^2+yz}{z}=\frac{z^2+zx}{x},$$

arătaţi că $x=y=z$.

Manuela Prajea

Soluţia 1: Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $x \geq y$ şi $x \geq z$. Atunci $\frac{x^2+xy}{y} \geq 2x$, iar $\frac{z^2+zx}{x} \leq 2z$. Deducem că $2z \geq 2x$, de unde, cu presupunerea iniţială, $x=z$. Atunci avem $\frac{x^2+xy}{y}=\frac{z^2+zx}{x}=2x$, de unde $x=y$ şi concluzia.

Soluţia 2: În funcţie de relaţia de ordine dintre x, y, z distingem şase cazuri:
Cazul **I.**: dacă $x \leq y \leq z$ atunci $\frac{x}{y} \leq 1 \leq \frac{z}{x}$ şi $x+y \leq x+z$. Înmulţind termen cu termen aceste două inegalităţi (termenii sunt numere pozitive), obţinem $\frac{x^2+xy}{y} \leq \frac{z^2+zx}{x}$. Conform enunţului, avem egalitate în această inegalitate, deci şi în inegalităţile pe care le-am înmulţit. Rezultă aşadar $\frac{x}{y}=1=\frac{z}{x}$, adică $x=y=z$.
Analog se tratează cazurile **II.** $y \leq z \leq x$ şi **III.** $z \leq x \leq y$.
Cazul **IV.**: dacă $x \leq z \leq y$ atunci $\frac{x}{y} \leq 1 \leq \frac{y}{z}$ şi $x+y \leq y+z$. Înmulţind termen cu termen aceste două inegalităţi, obţinem $\frac{x^2+xy}{y} \leq \frac{y^2+yz}{z}$. Trebuie să avem egalitate în această inegalitate, deci şi în inegalităţile pe care le-am înmulţit. Rezultă aşadar $\frac{x}{y}=1=\frac{y}{z}$, adică $x=y=z$.
Analog se tratează cazurile **V.** $y \leq x \leq z$ şi **VI.** $z \leq y \leq x$.
Aşadar în toate cazurile rezultă $x=y=z$.

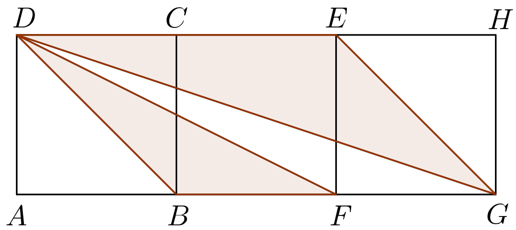
Problema 2. Se consideră trei pătrate $ABCD$, $BCEF$ şi $EFGH$.
Arătaţi că $m(\angle EDF)+m(\angle HDG)=45^\circ$.

Concursul interjudeţean ,,Traian Lalescu", Deva, 1986

Soluţie: Notând cu a lungimea laturilor pătratelor, cu ajutorul teoremei lui Pitagora, găsim că $DB=a\sqrt{2}$, $BF=a$, $DF=a\sqrt{5}$, $DE=2a$, $EG=a\sqrt{2}$, $DG=a\sqrt{10}$ şi întrucât

$$\frac{DB}{DE}=\frac{BF}{EG}=\frac{DF}{DG}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

triunghiurile DBF şi DEG sunt asemenea. De aici $m(\angle HDG) = m(\angle BDF)$, aşadar $m(\angle EDF) + m(\angle HDG) = m(\angle EDF) + m(\angle BDF) = 45°$.



Problema 3. Numerele $1, 2, 3, \ldots, 100$ de pe axa numerelor sunt capetele a 50 de segmente, fiecare din numerele $1, 2, 3, \ldots, 100$ fiind capăt pentru unul din segmente. Demonstraţi că printre cele 50 de segmente există fie două de lungimi egale, fie două care au suma lungimilor egală cu 100.

Revista Kvant, prelucrare

Soluţie:
Presupunem că ar fi posibil ca printre cele 50 de segmente să nu fie nici segmente de aceeaşi lungime, nici segmente cu suma lungimilor 100. Lungimile posibile de segmente sunt $1, 2, 3, \ldots, 99$. Împărţim segmentele în mulţimi astfel:
A_1 = mulţimea segmentelor de lungime 1 sau 99;
A_2 = mulţimea segmentelor de lungime 2 sau 98;
A_3 = mulţimea segmentelor de lungime 3 sau 97;
....
A_{49} = mulţimea segmentelor de lungime 49 sau 51;
A_{50} = mulţimea segmentelor de lungime 50.
Dacă am avea două din cele 50 de segmente într-o aceeaşi mulţime atunci aceste două segmente ar avea fie aceeaşi lungime, fie suma lungimilor egală cu 100, ceea ce ar contrazice presupunerea făcută la început. Trebuie aşadar să avem exact un segment în fiecare mulţime. Deoarece mulţimile A_1, A_3, A_5, ..., A_{49} conţin segmente de lungime impară, în vreme ce mulţimile A_2, A_4, A_6, ..., A_{50} conţin numai segmente de lungime pară, printre cele 50 de segmente vor fi 25 cu lungima impară şi 25 cu lungimea pară.
Să examinăm acum paritatea capetelor unui segment de lungime pară, respectiv impară. Un segment de lungime pară are capetele de aceeaşi paritate, în vreme ce un segment de lungime impară are capetele de parităţi diferite. Aşadar cele 25 de segmente de lungime impară folosesc 25 de numere pare şi 25 de numere impare, urmând ca celelalte 25 de numere pare şi celelalte 25 de numere impare să fie folosite la segmentele de lungime pară. Dar 25 de numere pare nu pot fi legate folosind numai segmente de lungime pară, deci presupunerea iniţială duce

la o contradicţie, prin urmare ea este falsă.

Problema 4. Vom numi un număr natural n *fidel* dacă există numere naturale $a < b < c$ astfel încât $a \mid b,\ b \mid c$ şi $n = a + b + c$.
Determinaţi mulţimea numerelor naturale care nu sunt *fidele*.

Olimpiadă India, 2011 (enunţ modificat)

Soluţie: (*Dan Schwarz*)
Dacă n este impar, $n = 2k + 1 = 1 + 2 + 2(k - 1)$, deci $n = 2k + 1$ este *fidel* pentru orice $k \geq 3$.
$2^4 = 16$ este *fidel* deoarece $16 = 1 + 3 + 12 = 1 + 5 + 10$.
Dacă un număr natural n este *fidel*, atunci este clar că orice multiplu al lui n este de asemenea *fidel*: $mn = m(a + b + c) = ma + mb + mc$.
Prin urmare singurele numere care ar putea să nu fie *fidele* sunt cele de forma
$n = 2^\ell(2k + 1)$ cu $\ell \in \{0, 1, 2, 3\}$ şi $k \in \{0, 1, 2\}$, adică
$n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20, 24, 40\}$. Cum însă $10 = 1+3+6$ este *fidel*, la fel sunt şi 20 şi 40. Deoarece orice număr *fidel* $n \geq 1 + 2 + 4 = 7$, rezultă că $1, 2, 3, 4, 5, 6$ nu sunt *fidele*. Rămân în dubiu 8, 12 şi 24 pentru care o simplă verificare arată că ele nu sunt *fidele*.