Problema 1. În triunghiul ABC, $m(\angle A) = 3m(\angle B)$, $AC = 81$ şi $BC = 144$. Aflaţi lungimea segmentului $[AB]$.

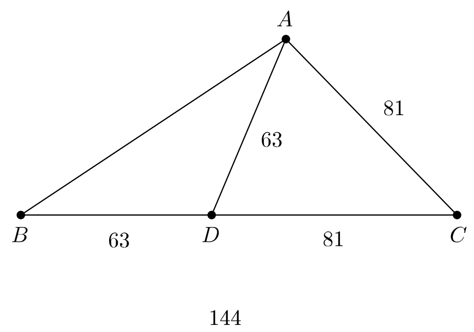
* * *

Soluţie:
Pe latura $[BC]$ considerăm punctul D astfel încât $\angle BAD \equiv \angle ABC$. Atunci triunghiul ABD este isoscel, deci $m(\angle ADC) = 2m(\angle ABD) = m(\angle CAD)$, deci şi triunghiul ACD este isoscel. Rezultă că $DC = AC = 81$, deci $AD = BD = 144 - 81 = 63$.

Scriind relaţia lui Stewart, obţinem:

$$AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC + BD \cdot CD \cdot BC,$$

de unde se obţine imediat că $AB = 105$.



Problema 2. Ioana plasează jetoane pe pătrăţelele unei table 8×8 astfel încât în fiecare din cele 64 de pătrăţele să fie cel mult un jeton. Determinaţi, cu justificare, numărul maxim de jetoane pe care Ioana le poate plasa pe tablă astfel ca pe nicio linie, pe nicio coloană şi pe niciuna din cele două diagonale ale tablei să nu se afle 5 sau mai multe jetoane.

Olimpiadă Marea Britanie, 2012, turul I

Soluţie:
Deoarece pe fiecare din cele 8 linii ale tablei se pot pune cel mult 4 jetoane, pe tablă se pot pune în total cel mult $8 \cdot 4 = 32$ de jetoane. Aceasta este însă doar o estimare, pentru a dovedi că numărul maxim de jetoane se pot fi plasate pe tablă respectând condiţiile din enunţ este într-adevăr 32, mai trebuie să dăm un exemplu de un mod de amplasare a 32 de jetoane respectând condiţiile. Sunt multe asemenea exemple, unele mai simetrice (vezi exemplele de mai jos), altele nu. Orice exemplu valid încheie rezolvarea problemei: pe de o parte am arătat că se pot pune cel mult 32 de jetoane, pe de altă parte exemplul arată că 32 de jetoane se pot cu adevărat

plasa pe tablă, prin urmare maximul cerut este 32.

Iată câteva exemple (pătrăţelele marcate cu $\times$ sunt cele care conţin jetoane):

×	×	×	×				
				×	×	×	×
×	×	×	×				
				×	×	×	×
×	×	×	×				
				×	×	×	×
×	×	×	×				
				×	×	×	×

×		×			×		×
	×		×	×		×	
×		×			×		×
	×		×	×		×	
×		×			×		×
	×		×	×		×	
×		×			×		×
	×		×	×		×	

×	×					×	×
×	×					×	×
		×	×	×	×		
		×	×	×	×		
×	×					×	×
×	×					×	×
		×	×	×	×		
		×	×	×	×		

×	×	×	×				
×	×	×	×				
				×	×	×	×
				×	×	×	×
×	×	×	×				
×	×	×	×				
				×	×	×	×
				×	×	×	×

Problema 3. Fie a, b, c, d numere naturale nenule astfel încât

$$a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd.$$

Demonstraţi că $a + b + c + d$ este un număr compus.

* * *

Soluţie:
Avem $(a + b)^2 - (c + d)^2 = cd - ab$ şi $(a - b)^2 - (c - d)^2 = 3(cd - ab)$.
Înmulţind prima din aceste două relaţii cu 3 şi scăzând-o pe cea de-a doua obţinem

$$3(a + b + c + d)(a + b - c - d) = (a - b + c - d)(a - b - c + d).$$

Dacă $a + b + c + d$ ar fi prim (sau 1) atunci el ar divide unul din factorii din membrul drept. Dar atunci fie $a + b + c + d$ ar fi mai mic decât modulul unuia dintre factorii din membrul drept, ceea ce nu se poate, fie membrul drept ar fi egal cu 0. Dar în acest ultim caz $a+b+c+d$ ar fi par, mai mare ca 2, deci compus.

În concluzie, numărul $a + b + c + d$ este compus.

Observaţie: Problema a fost folosită în concursul KöMaL (martie 1998).
O variantă a ei a apărut şi în revista Matematika v škole, nr. 2/2012 (P.5236):

Fie a, b, c, d numere naturale nenule astfel încât

$$a^2 + b^2 - ab = c^2 + d^2 - cd.$$

Demonstraţi că $a + b + c + d$ este un număr compus.

Problema 4. Demonstraţi că ecuaţia

$$xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = 6$$

are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor întregi.

N. Vassiliev (Turneul Oraşelor, 1997)

Soluţia 1:
Căutăm mai întâi o soluţie particulară a ecuaţiei. Putem începe prin a căuta soluţii cu $x = 0$. Ecuaţia devine $yz(y - z) = 6$ şi este uşor de ghicit soluţia $x = 0$, $y = 3$, $z = 2$. (Se pot determina şi celelalte soluţii cu $x = 0$: $y = 3$, $z = 1$; $y = -2$, $z = -3$; $y = -2$, $z = 1$; $y = -1$, $z = -3$ şi $y = -1$, $z = 2$.)
Pornind de la o asemenea soluţie particulară, se poate observa că în general tripletele de forma $(x, y, z) = (k,\ 3+k,\ 2+k)$ verifică ecuaţia din enunţ (şi sunt distincte pentru valori întreg distincte ale lui k), deci ecuaţia are o infinitate de soluţii.

Chiar dacă soluţia de mai sus rezolvă complet problema, ea nu ne oferă o înţelegere completă a problemei. Soluţia de mai jos surprinde toată esenţa acesteia şi permite, în plus, determinarea *tuturor* soluţiilor întregi ale ecuaţiei date.

Soluţia 2:
Pornind eventual de la observaţia că dacă măcar două din variabilele x, y, z sunt egale atunci expresia $xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x)$ se anulează, întocmai ca şi expresia $(x - z)(y - x)(z - y)$, ne vine ideea să comparăm cele doua expresii. Constatăm imediat că cele două sunt egale, deci ecuaţia din enunţ se scrie echivalent

$$(x - z)(y - x)(z - y) = 6.$$

Notând $x - z = a$, $y - x = b$, $z - y = c$, avem că $a + b + c = 0$, adică trebuie aflate soluţiile întregi ale ecuaţiei $abc = 6$ care verifică $a + b + c = 0$. Se constată uşor (examinând de exemplu divizorii lui 6) că singurele soluţii sunt cele şase permutări ale elementelor mulţimii $\{a, b, c\} = \{-2, -1, 3\}$.
De exemplu, în cazul $a = -2$, $b = -1$, $c = 3$, se obţn soluţiile $(x, y, z) = (k,\ k + 3,\ k + 2)$, cu $k \in \mathbb{Z}$.

Observaţie: O altă idee, care necesită însă cunoaşterea modului de rezolvare a unei ecuaţii de gradul al doilea, este de a trata ecuaţia ca o ecuaţie de gradul (cel mult) doi în variabila x. În cazul $y - z = 0$ ecuaţia nu este de gradul II dar în acest caz nici nu avem soluţii, ecuaţia devenind $0 = 6$. În cazul $y - z \neq 0$, pentru ca ecuaţia să aibă soluţii întregi trebuie ca discriminantul $\Delta_x = (y-z)^4 + 24(y-z)$ să fie pătrat perfect şi, mai mult, să fie divizibil cu $(y-z)^2$. Rezultă de aici că $y - z$ divide 24. Se obţine imediat că $y - z \in \{1, 2, -3\}$ şi se pot, din nou, găsi toate soluţiile întregi ale ecuaţiei.