Problema 1. Numerele reale a, b, c, d verifică relaţiile $a^2+b^2 = c^2+d^2$ şi $ac+bd = 0$. Ce valori poate lua expresia $ab + cd$?

Concursul Arany Dániel, Ungaria, 2008

Soluţia 1: (oficială, din cadrul concursului)
$(a^2 + b^2)(ab + cd) = (a^2 + b^2)ab + (a^2 + b^2)cd = (c^2 + d^2)ab + (a^2 + b^2)cd = abc^2 + abd^2 + cda^2 + cdb^2 = bc(ac + bd) + ad(ac + bd) = bc \cdot 0 + ad \cdot 0 = 0$.
Dacă $a^2 + b^2 = 0$ atunci $a = b = 0$, deci $ab + cd = 0$. Dacă $a^2 + b^2 \neq 0$ rezultă $ab + cd = 0$, deci singura valoare posibilă este 0.
Această valoare este într-adevăr posibilă, ea se obţine de exemplu pentru $a = b = c = d = 0$, deci mulţimea valorilor expresiei $ab + cd$ este $\{0\}$.

Soluţia 2:
Dacă $b = 0$ atunci $ac = 0$, deci $a = 0$ sau $c = 0$.
Dacă $a = b = 0$ atunci din $c^2 + d^2 = 0$ rezultă $c = d = 0$, deci $ab + cd = 0$.
Dacă $a = c = 0$ atunci iarăşi $ab + cd = 0$.
Dacă $b \neq 0$ atunci $d = -\dfrac{ac}{b}$ şi relaţia $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ se rescrie succesiv $a^2 + b^2 = c^2 + \dfrac{a^2c^2}{b^2}$ adică $b^2(a^2 + b^2) = c^2(a^2 + b^2)$. Cum $a^2 + b^2 \geq b^2 > 0$, rezultă $b^2 = c^2$, apoi $a^2 = d^2$. Deducem că $b = \pm c$ şi $a = \mp d$, de unde $ab = -cd$, deci $ab + cd = 0$.
Această valoare este într-adevăr posibilă, ea se obţine de exemplu pentru $a = b = c = d = 0$, deci mulţimea valorilor expresiei $ab + cd$ este $\{0\}$.

Observaţie:
În clasa a IX-a, când veţi face vectori, veţi înţelege mai bine ce spune problema asta:
Vectorii $\overrightarrow{u}(a, b)$ şi $\overrightarrow{v}(c, d)$ au aceeaşi normă şi produsul lor scalar este 0, adică ei sunt ortogonali. Atunci rotindu-l pe $\overrightarrow{u}$ cu 90° (fie în sens trigonometric, fie în sensul acelor de ceasornic), vom obţine vectorul $\overrightarrow{v}$. După rotaţie, în funcţie de sens, vectorul $\overrightarrow{u}(a, b)$ devine $\overrightarrow{w}(\pm b, \mp a)$, de unde rezultă concluzia, ca în Soluţia 2.

Problema 2. Arătaţi că dacă x şi y sunt numere reale pozitive cu suma 1, atunci

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

Olimpiadă Canada, 1971

Soluţie: Inegalitatea din enunţ se scrie echivalent $(x + 1)(y + 1) \geq 9xy$, apoi, folosind condiţia $1 = x+y$, ea se scrie $(2x+y)(2y+x) \geq 9xy$, adică $2x^2+5xy+2y^2 \geq$

$9xy$, sau $2(x-y)^2 \geq 0$, inegalitate evident adevărată.

Egalitatea are loc dacă $x = y = \frac{1}{2}$.

Problema 3. Fiecare număr natural nenul trebuie colorat fie cu roşu, fie cu verde, astfel încât să fie respectate următoarele condiţii:
• suma oricăror trei numere roşii, nu neapărat distincte, este un număr roşu;
• suma oricăror trei numere verzi, nu neapărat distincte, este un număr verde;
• există atât numere roşii cât şi numere verzi.
Determinaţi toate colorările posibile. Justificaţi răspunsul.

Olimpiadă Germania, 2007, runda 1

Soluţie:
Vom demonstra că există două colorări posibile: numerele pare se colorează cu roşu, cele impare cu verde, sau invers.

Să observăm mai întâi că ambele colorări amintite mai sus satisfac cele trei condiţii din enunţ (suma a trei numere pare este un număr par, iar suma a trei numere impare este un număr impar).

Reciproc, să demonstrăm că acestea sunt singurele colorări posibile.
Să presupunem că 1 este roşu. Atunci $3 = 1+1+1$ este tot roşu, apoi $5 = 3+1+1$ este roşu şi aşa mai departe se obţine din aproape în aproape că orice număr impar este roşu.
Vom demonstra în continuare că 2 este verde. Presupunând contrariul, am avea că $4 = 2 + 1 + 1$ este tot roşu, că $6 = 4 + 1 + 1$ este roşu şi, din aproape în aproape, că orice număr par este roşu. Ar rezulta că toate numerele sunt roşii, ceea ce contrazice condiţia a treia. Aşadar 2 este verde. Atunci $6 = 2 + 2 + 2$ este verde, $10 = 6 + 2 + 2$ este verde şi aşa mai departe, orice număr de forma $4k + 2$ este verde.
Dacă 4 ar fi roşu, ar rezulta că $6 = 4 + 1 + 1$ este roşu, dar, aşa cum am văzut, $6 = 2+2+2$ este verde. Prin urmare 4 este verde şi atunci $8 = 4+2+2$ este verde, $12 = 8 + 2 + 2$ este verde şi tot aşa, din aproape în aproape, toate numerele de forma $4k$ sunt verzi. Prin urmare, dacă 1 este roşu, atunci numerele impare sunt roşii, iar cele pare sunt verzi.
Dacă 1 este verde, se arată la fel că toate numerele impare sunt verzi şi toate numerele pare sunt roşii.

Întrebare suplimentară: Se schimbă ceva la acest răspuns dacă trebuie colorate toate numerele naturale (inclusiv 0) respectând aceleaşi trei condiţii?

Problema 4. Fie $ABCD$ un paralelogram, P şi Q puncte pe laturile (BC) şi (CD) astfel încât $BP = DQ$ şi R intersecţia dreptelor BQ şi DP. Atunci semidreapta $(AR$ este bisectoarea unghiului A.

Olimpiadă Germania, 2003, runda 1

Soluţie: Fie S intersecţia dreptelor AB şi DP. Din asemănarea triunghiurilor BRS şi QRD obţinem $\dfrac{RS}{RD} = \dfrac{SB}{DQ}$. Folosind că $DQ = BP$ şi că triunghiurile BSP şi ASD sunt asemenea, obţinem că $\dfrac{SB}{DQ} = \dfrac{SB}{BP} = \dfrac{SA}{AD}$, deci că $\dfrac{RS}{RD} = \dfrac{SA}{AD}$. Cu reciproca teoremei înălţimii, rezultă că $(AR$ este bisectoarea unghiului $\angle SAD$.