Problema 1. Se dau numerele $a = \overline{a_1a_2...a_n}$, $a > 1$, şi $b = \overline{a_1a_2...a_na_1a_2...a_n}$ (în baza 10).
Ştiind că $a^2 \mid b$, aflaţi valoarea raportului $\dfrac{b}{a^2}$.

Concurs Canada

Soluţie:
Avem $10^{n-1} \leq a < 10^n$ şi $b = (10^n + 1)a$, de unde rezultă că $a \mid 10^n + 1$, adică există $k \in \mathbb{N}$ astfel ca $ak = 10^n + 1$. Cum $10^{n-1}k \leq ak < 10^n k$, adică $10^{n-1}k \leq 10^n + 1 < 10^n k$, deducem că, dacă $n > 1$, atunci $k \leq 10$ şi $k \geq 2$. În plus, k trebuie să dividă $10^n + 1$, deci k este impar şi $k \neq 3$, $k \neq 5$ şi $k \neq 9$, deci k poate fi numai 7. Prin urmare singura valoare întreagă posibilă a lui $\dfrac{b}{a^2}$ este 7 (dacă a are cel puţin două cifre). Dacă $n = 1$, din $a^2 \mid \overline{aa}$ rezultă $a \mid 11$, ceea ce nu se poate pentru $a > 1$, a cifră.

Observaţie: Există într-adevăr numere a şi b cu proprietatea din enunţ, de exemplu, $a = 143$ şi $b = 143143 = 143^2 \cdot 7$.

Problema 2. În patrulaterul $ABCD$, AD este paralelă cu BC, iar K este un punct pe latura $[AB]$. Arătaţi că paralela prin A la KC şi paralela prin B la KD se intersectează într-un punct de pe $[CD]$.

Concurs Canada

Soluţie:
Fie $\{R\} = CK \cap AD$, $\{T\} = DK \cap BC$, X punctul de intersecţie al paralelei din B la KD cu CD, iar Y punctul de intersecţie al paralelei din A la CK cu CD. Atunci $\dfrac{DX}{XC} = \dfrac{BT}{BC}$ (1) şi
$\dfrac{DY}{YC} = \dfrac{DA}{RA}$ (2). Pe de altă parte, $\dfrac{RA}{BC} = \dfrac{AK}{BK} = \dfrac{DA}{BT}$, de unde
$\dfrac{DA}{RA} = \dfrac{BT}{BC}$ (3).
Din (1), (2) şi (3) obţinem $\dfrac{DX}{XC} = \dfrac{DY}{YC}$ şi, cum $X, Y \in [CD]$, rezultă $X = Y$, adică punctele în care paralelele din A la CK şi din B la DK taie CD coincid.

Problema 3. Se dau şase numere de patru cifre al căror cel mai mare divizor comun este 1. Arătaţi că putem alege cinci dintre ele al căror cel mai mare divizor comun este tot 1.

Olimpiadă Rusia

Soluţie:
Presupunem că oricare cinci din cele şase numere au un divizor comun prim. Acesta nu divide şi cel de-al şaselea număr. Cei şase divizori comuni ai grupurilor de câte cinci numere sunt numere prime distincte, adică cel puţin 2, 3, 5, 7, 11, 13. Atunci unul dintre numere este cel puţin $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 15015$, contradicţie cu faptul că numerele au câte patru cifre.

Problema 4. Putem pava o podea 100×100 folosind un număr egal de dale pătrate 3×3 şi 1×1?

Andrei Eckstein

Soluţie:
Vom arăta că răspunsul la întrebarea din enunţ este afirmativ. Vom indica o modalitate de a pava podeaua.
Putem pava un dreptunghi 10×3 cu 3 dale 3×3 şi 3 dale 1×1, deci putem pava şi un dreptunghi 100×3 folosind câte 30 de dale din fiecare tip.
De asemenea, putem pava un dreptunghi 25×16 astfel: colţul 24×15 din dreapta sus îl pavăm cu $8 \cdot 5 = 40$ dale 3×3. Cele 40 de pătrate rămase (pe marginea din stânga şi cea de jos a pătratului 25×16) le pavăm cu dale 1×1. Folosind 28 de dreptunghiuri 100×3 şi un dreptunghi 100×16 (obţinut prin lipirea a patru dreptunghiuri 25×16) vom putea pava podeaua 100×100.