Problema 1. Determinaţi numerele naturale nenule a, b, c, d care satisfac simultan relaţiile
$$a^2 = b^3, \quad c^4 = d^5 \quad \text{şi} \quad b - d = 19.$$
* * *

Soluţie:
Examinând descompunerile în factori primi ale numerelor a^2, b^3, c^4, d^5 şi ţinând cont de faptul că 2 şi 3, respectiv 4 şi 5 sunt numere prime între ele, deducem că orice factor prim apare în descompunerea în factori primi a lui $a^2 = b^3$ la o putere multiplu de 6 şi orice factor prim apare în descompunerea în factori a lui $c^4 = d^5$ la o putere multiplu de 20. Rezultă de aici că există $n, m \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $a = n^3$, $b = n^2$, $c = m^5$, $d = m^4$. Deducem că $19 = b - d = n^2 - m^4 = (n - m^2)(n + m^2)$. Cum 19 şi $n + m^2$ sunt pozitive, trebuie ca $n - m^2 > 0$. Cum, în plus, $n - m^2 < n + m^2$, iar 19 este număr prim, rezultă că $n - m^2 = 1$ şi $n + m^2 = 19$. Obţinem de aici că $n = 10$ şi $m^2 = 9$, deci $m = 3$. Prin urmare $a = 1000$, $b = 100$, $c = 243$, $d = 81$, numere care satisfac relaţiile din enunţ.

Problema 2. Avem două cutii cu pietricele. Una conţine p pietricele, cealaltă q pietricele. Avem voie să facem următoarele două feluri de mutări: putem fie să scoatem câte o pietricică din fiecare cutie, fie să triplăm numărul de pietricele dintr-una din cutii.
a) Putem goli ambele cutii după o succesiune de mutări din cele două feluri dacă $p = 100$, $q = 200$? Dar dacă $p = 101$, $q = 200$?
b) Determinaţi perechile (p, q) de numere naturale nenule pentru care cele două cutii pot fi golite printr-o succesiune de mutări.

Concursul KöMaL, prelucrare

Soluţia 1:
a) Dacă $p = 100$, $q = 200$, cutiile pot fi golite astfel: mai întâi, de 50 de ori, scoatem câte o pietricică din ambele cutii. Ajungem la 50 de pietricele în prima cutie, 150 în cea de-a doua. Triplăm acum numărul de pietricele din prima cutie astfel încât vom avea câte 150 de pietricele în fiecare cutie. În fine, de 150 de ori, scoatem câte o pietricică din fiecare cutie golind astfel cele două cutii.
Dacă $p = 101$, $q = 200$ cutiile nu pot fi golite pentru că iniţial, numărul de pietricele din cele două cutii sunt două numere de paritate diferită (101 şi 200). Dacă la un moment dat, parităţile numerelor care reprezintă pietricelele din cele două cutii sunt diferite, atunci şi după efectuarea unei mutări parităţile vor rămâne diferite. Într-adevăr: dacă scoatem câte o pietricică din fiecare cutie schimbăm ambele parităţi, deci vom rămâne cu o cutie cu un număr par de pietricele şi cu cealaltă având un număr impar de pietricele; dacă triplăm numărul de pietricele dintr-o cutie nu modificăm paritatea numărului de pietre din niciuna din cutii, deci vom rămâne iarăşi cu o cutie cu un număr par de pietricele şi cu cealaltă având un număr impar de pietricele. Deoarece acest fapt rămâne invariant pe parcursul efectuării diverselor mutări, nu putem ajunge la situaţia în care ambele cutii să fie

goale pentru că asta ar presupune că am putea ajunge să avem un număr par de pietricele (0 şi 0) în cele două cutii.
b) Argumentul de mai sus este valabil pentru orice pereche (p, q) de numere naturale nenule având parităţi diferite. Aşadar aceste perechi nu convin. Rămâne să studiem perechile (p, q) de numere naturale nenule având aceeaşi paritate. Vom arăta că în toate aceste situaţii putem goli cutiile. Putem presupune $p \leq q$. Dacă $p = q$ este evident că putem goli cutiile din p mutări din primul tip. Dacă $0 < p < q$, încercăm să facem în cazul general ceea ce am făcut în cazul $p = 100$, $q = 200$. Ar trebui să găsim un x astfel încât $3(p - x) = q - x$. Atunci, scoţând mai întâi câte x pietricele din fiecare cutie, triplând pietricelele din prima cutie, ajungem la câte $q - x$ pietricele în fiecare cutie, pietricele pe care le putem scoate din $q - x$ mutări. Ecuaţia de mai sus are soluţia $x = \dfrac{3p - q}{2}$. Cum $3p$ şi q au aceeaşi paritate, evident x este număr întreg. În plus, dacă $p \leq q$ atunci $x \leq p$, deci chiar putem scoate x pietricele din cele două cutii. Există însă o problemă: este posibil ca $x < 0$ dacă $3p < q$. Pentru a surmonta această problemă, mai întâi triplăm de $n \geq 0$ ori numărul de pietricele din cutia cu p pietricele până când avem în prima cutie $p' = 3^n p$ pietricele, cu $3^n p < q \leq 3^{n+1} p$. Acum putem scoate un anumit număr, $x \geq 0$, de pietricele din cele două cutii (repetând de x ori prima mutare), astfel încât în a doua cutie să rămână de trei ori mai multe pietricele decât în prima, adică astfel încât să avem

$$3(p' - x) = q - x.$$

Din ecuaţia de mai sus obţinem $x = \dfrac{3p' - q}{2} \in \mathbb{N}$. În plus, $x < p'$, deci operaţia de scoatere a câte unei pietricele din cele două cutii chiar poate fi repetată de x ori. Acum triplăm numărul de pietricele din prima cutie (care nu este goală). Obţinem câte $q - x$ pietricele în cele două cutii. Repetând de $q - x$ ori primul tip de mutare reuşim să golim cutiile.

Soluţia 2:
Ca mai sus se arată că dacă p, q au parităţi diferite atunci nu putem goli cutiile. Dacă p, q au aceeaşi paritate, cu $p \leq q$, scoate câte $p - 1$ pietricele din fiecare cutie şi ajungem la $(1,\ q - p + 1)$. Dacă $q - p + 1 = 1$ terminăm scoţând câte o pietricică din fiecare cutie, dacă nu, triplăm pietricelele din prima cutie, ajungând la $(3, q - p + 1)$. Scoatem de două ori câte o pietricică şi ajungem la $(1, q - p - 1)$. Dacă $q - p - 1 = 1$, scoatem câte o pietricică, dacă nu, triplăm şi scoatem câte două ajungând la $(1,\ q - p - 3)$, ş.a.m.d., până când $q - p - (2k + 1)$ devine 1. Atunci scoatem câte o pietricică şi am terminat.

Problema 3. Determinaţi mulţimea numerelor naturale nenule n pentru care numărul

$$(n+1)^{n-1} + (n-1)^{n+1}$$

este divizibil cu n^2.

* * *

Soluţia 1:
Evident condiţia este satisfăcută pentru $n = 1$. În continuare presupunem $n \geq 2$. Deoarece $(n+1)^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, iar $(n-1)^{n+1} \equiv (-1)^{n+1} \pmod{n}$, pentru ca numărul $(n+1)^{n-1}+(n-1)^{n+1}$ să fie divizibil măcar cu n, trebuie ca $1+(-1)^{n+1} = 0$, deci n să fie par.
Vom arăta că pentru orice număr par n, numărul $(n+1)^{n-1} + (n-1)^{n+1}$ este divizibil cu n^2.
Avem că $(n+1)^{n-1} - 1 = (n+1-1)\big((n+1)^{n-2} + (n+1)^{n-3} + \cdots + (n+1) + 1\big) = n\big((M_n+1) + (M_n+1) + \cdots + (M_n+1) + 1\big) = n(M_n + n - 1) = M_{n^2} - n$.
Similar, $(n-1)^{n+1} + 1 = (n-1+1)\big((n-1)^n - (n-1)^{n-1} + \cdots - (n-1) + 1\big) = n\big((M_n+1) - (M_n-1) + \cdots - (M_n-1) + 1\big) = n(M_n + n + 1) = M_{n^2} + n$.
Adunând aceste două relaţii rezultă concluzia.
În concluzie, mulţimea căutată este formată din 1 şi numerele naturale nenule pare.

Soluţia 2:
Această a doua soluţie se bazează pe o formulă care dă o informaţie mai precisă decât formula $(a+b)^n = M_a + b^n$, anume:

$$(a+b)^n = M_{a^2} + nab^{n-1} + b^n.$$

Pentru $n = 0$ şi $n = 1$ relaţia este evidentă. Pentru $n \geq 2$ această formulă se demonstrează pe aceeaşi idee care a fost folosită în materialul teoretic pentru justificarea formulei $(a+b)^n = M_a + b^n$. Dacă scriem $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ şi desfacem parantezele vom obţine diverşi termeni de forma $a^k b^{n-k}$. Fiecare termen provine dintr-o alegere, a sau b, din fiecare paranteză. Vom avea un singur termen cu b^n, anume acela în care din fiecare paranteză a fost ales b. Câţi termeni cu ab^{n-1} avem? Aceşti termeni provin din alegerea lui b din fiecare paranteză, cu o excepţie, o paranteză din care a fost ales termenul a. Această paranteză din care îl luăm pe a poate fi aleasă în n moduri (poate fi oricare din cele n paranteze), aşa încât vom avea n termeni ab^{n-1}. Aşadar suma termenilor care conţin cel mult un factor a este $b^n + nab^{n-1}$. Toţi ceilalţi termeni conţin măcar doi factori a, prin urmare sunt divizibili cu a^2. Rezultă că $(a+b)^n = M_a^2 + nab^{n-1} + b^n$.

Să trecem acum la rezolvarea problemei:
Folosind formula dedusă mai sus, avem:
$(n+1)^{n-1} = M_{n^2} + (n-1)n \cdot 1^{n-2} + 1^{n-1} = M_{n^2} - n + 1$ şi $(n-1)^{n+1} = M_{n^2} + (n+1)n \cdot (-1)^n + (-1)^{n+1}$ adică $M_{n^2} + n - 1$ dacă n este par şi $M_{n^2} - n + 1$ dacă n este impar.
Adunând aceste două relaţii obţinem că $(n+1)^{n-1} + (n-1)^{n+1}$ este M_{n^2} dacă n este par şi este $M_{n^2} - 2n + 2$ dacă n este impar.

De aici rezultă că orice n par satisface condiţia din enunţ. Dintre valorile impare ale lui n convine numai $n = 1$, in caz contrar $(n+1)^{n-1} + (n-1)^{n+1} = M_{n^2} - 2n + 2$ nefiind divizibil cu n.

Problema 4. Fie E şi respectiv F mijloacele laturilor $[BC]$ şi $[CD]$ ale unui patrulater convex $ABCD$. Segmentele $[AE]$, $[AF]$ şi $[EF]$ împart $ABCD$ în patru triunghiuri ale căror arii sunt patru numere naturale consecutive.
Aflaţi aria maximă a triunghiului BAD.

Turneul Oraşelor, 2002

Soluţie:
Fie n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ ariile celor patru triunghiuri determinate de segmentele $[AE]$, $[AF]$ şi $[EF]$. Deoarece E şi F sunt mijloace, avem $S[ABE] = S[ACE]$ şi $S[ACF] = S[ADF]$, de unde $S[AECF] = S[ACE] + S[ACF] = \frac{1}{2}S[ABC] + \frac{1}{2}S[ACD] = \frac{1}{2}S[ABCD] = \frac{n+n+1+n+2+n+3}{2} = 2n+3$. În plus, triunghiurile ΔCEF şi ΔCBD sunt asemenea, raportul de asemănare fiind $\frac{1}{2}$, de unde $S[CEF] = \frac{1}{4}S[CBD] < \frac{1}{4}S[ABCD] = \frac{4n+6}{4}$. Deducem că $S[CEF] \in \{n,\ n+1\}$. Distingem două cazuri:
1. Dacă $S[CEF] = n$ atunci, din asemănarea de mai sus, $S[CBD] = 4n$, de unde $S[BAD] = S[ABCD] - S[CBD] = 4n + 6 - 4n = 6$.
2. Dacă $S[CEF] = n+1$ atunci $S[CBD] = 4(n+1)$, de unde rezultă că $S[BAD] = S[ABCD] - S[CBD] = 4n + 6 - 4n - 4 = 2$.
Aşadar, în aparenţă aria maximă căutată este $\max\{2,\ 6\} = 6$. Însă concluzia este pripită atâta timp cât nu am demonstrat că primul caz este într-adevăr posibil. Acest lucru se poate vedea făcând efectiv construcţia unui patrulater $ABCD$ pentru care $S[BAD] = 6$. Iată construcţia:
Observăm că ar trebui să construim un patrulater $AECF$ astfel ca $S[CEF] = n$, $S[AEF] = n+3$, $S[AEC] = n+1$ şi $S[AFC] = n+2$. Apoi punctele B, D vor fi simetricele lui C faţă de E, respectiv F. Dacă notăm $\{O\} = AC \cap EF$, trebuie ca $\frac{AO}{CO} = \frac{n+3}{n}$ şi $\frac{EO}{FO} = \frac{n+1}{n+2}$. O să construim chiar un patrulater ortodiagonal cu aceste proprietăţi. Considerăm două drepte perpendiculare care se taie într-un punct O. Pe prima dreaptă considerăm punctele A şi C astfel ca $O \in (AC)$, $AO = (n+3)x$, $CO = nx$, cu x ce va fi ales convenabil în cele ce urmează. Pe cealaltă dreaptă considerăm punctele E şi F astfel ca $O \in (EF)$, $EO = (n+1)x$ şi $FO = (n+2)x$. Un calcul simplu arată că pentru a obţine ariile dorite trebuie să alegem $x = \sqrt{\frac{2}{2n+3}}$. Aşadar se poate construi un patrulater $ABCD$ în care ariile triunghiurilor CEF, ABE, ADF, AEF sunt patru numere naturale consecutive şi $S[BAD] = 6$, prin urmare valoarea 6 chiar se poate obţine şi, după cum am văzut mai sus, această valoare este cea mai mare valoare posibilă.