Problema 1. Arătaţi că orice număr natural nenul are un multiplu care foloseşte toate cele zece cifre.

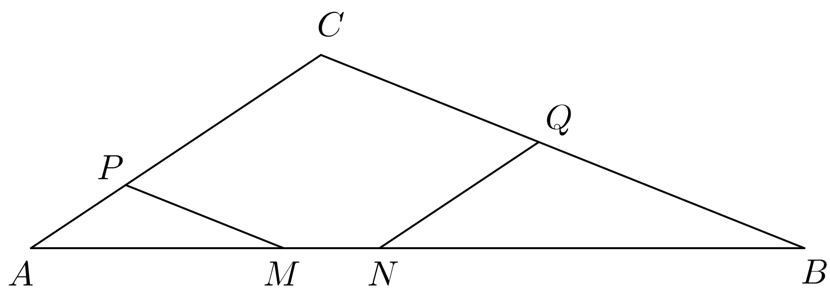
Concursul Putnam, 1956

Soluţie: Pentru a demonstra că orice număr natural $n = \overline{a_1a_2\ldots a_m}$ are un multiplu în a cărui scriere zecimală apar toate cele zece cifre, considerăm n numere naturale consecutive care conţin aceste cifre. Din n numere naturale consecutive, există unul care este divizibil cu n. Putem lua, de exemplu, numerele: $\overline{1234567890\underbrace{00\ldots01}_{m\text{ cifre}}}$, $\overline{1234567890\underbrace{00\ldots02}_{m\text{ cifre}}}$, $\ldots$, $\overline{1234567890a_1a_2\ldots a_m}$.

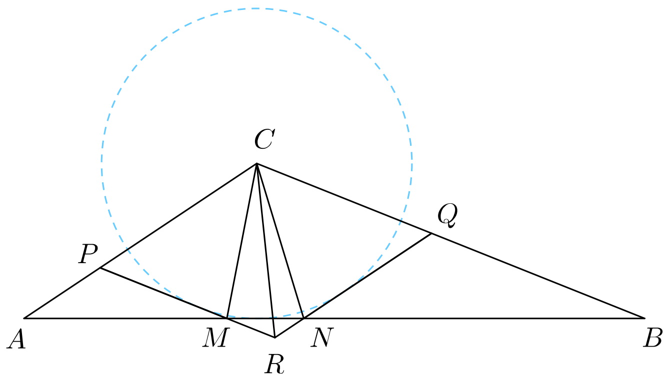
Problema 2. Pe latura AB, cea mai lungă a triunghiului ABC, se consideră punctele M şi N astfel încât $BM = BC$ şi $AN = AC$. Paralela din M la latura (BC) intersectează latura (AC) în P, iar paralela din N la latura (AC) intersectează latura (BC) în Q. Demonstraţi că $CP = CQ$.

Kvant

Soluţia 1:
Deoarece $MP \parallel BC$, din teorema lui Thales rezultă $\dfrac{AP}{CP} = \dfrac{AM}{MB}$, de unde $\dfrac{AP+CP}{CP} = \dfrac{AM+MB}{MB} = \dfrac{AB}{BC}$, apoi $CP = \dfrac{AC\cdot BC}{AB}$.
Analog se arată că şi $CQ = \dfrac{AC\cdot BC}{AB}$, de unde rezultă concluzia.



Soluţia 2: (*Miriam Mihai, Cosmina Tartau*)
Fie $\{R\} = NQ \cap MP$. Atunci $CQRP$ este paralelogram, iar $m(\sphericalangle BMC) = m(\sphericalangle BCM) = m(\sphericalangle CMP)$, adică $(MC$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle NMP$. Analog, $(NC$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MNQ$, deci C este centrul cercului exînscris triunghiului MNR tangent laturii $[MN]$. Prin urmare $(RC$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle NRM$, deci $CQRP$ este romb, de unde $CP = CQ$.



Observaţie: Deoarece $AB < AC + BC = AN + BM$, deci ordinea punctelor pe dreapta AB este A, M, N, B.

Problema 3. O submulţime a mulţimii $\{1, 2, 3 \ldots, 50\}$ se numeşte *specială* dacă nu conţine nicio pereche de forma $\{x, 3x\}$. O submulţime specială se numeşte *superspecială* dacă ea are numărul maxim posibil de elemente. Câte elemente are o submulţime superspecială şi câte submulţimi superspeciale există?

Olimpiadă Finlanda, 2013

Soluţie:
Considerăm submulţimile: $A_1 = \{1, 3, 9, 27\}$, $A_2 = \{2, 6, 18\}$, $A_3 = \{4, 12, 36\}$, $A_4 = \{5, 15, 45\}$, $A_5 = \{7, 21\}$, $A_6 = \{8, 24\}$, $A_7 = \{10, 30\}$, $A_8 = \{11, 33\}$, $A_9 = \{13, 39\}$, $A_{10} = \{14, 42\}$ şi $A_{11} = \{16, 48\}$. Considerând elementele fiecăreia din aceste submulţimi ca fiind aranjate în ordine crescătoare, o submulţime specială nu poate conţine elemente consecutive ale niciuneia din mulţimi. Astfel, dintr-o submulţime specială pot face parte: cel mult două elemente (neconsecutive) din mulţimile A_1, A_2, A_3, A_4 (neconsecutive) şi cel mult un element din mulţimile $A_5, A_6, \ldots, A_{11}$. Pentru a obţine o submulţime superspecială, trebuie să scoatem din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 50\}$ două elemente din mulţimea A_1 şi câte unul din mulţimile $A_2, \ldots, A_{11}$, în total 12 elemente.
Reciproc, dacă scoatem două elemente din A_1 astfel încât numerele rămase să nu fie vecine (adică să scoate 1 şi 9, 3 şi 9 sau 3 şi 27), scoatem din mulţimile A_2, A_3, A_4 elementul mijlociu (6, 12 şi 15), iar din fiecare din mulţimile $A_5, A_6, \ldots, A_{11}$ câte un element, vom obţine o submulţime specială cu 38 de elemente. Aşadar o submulţime specială are cel mult 38 de elemente şi există submulţimi speciale cu 38 de elemente, prin urmare submulţimile superspeciale au 38 de elemente.
Ele se obţin eliminând din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 50\}$ următoarele elemente:
• din mulţimea A_1 trebuie să îi eliminăm fie pe 1 şi pe 9, fie pe 3 şi pe 9, fie pe 3

şi pe 27 (3 variante)
• din mulţimea A_2 trebuie să îl eliminăm pe 6 (o variantă)
• din mulţimea A_3 trebuie să îl eliminăm pe 12 (o variantă)
• din mulţimea A_4 trebuie să îl eliminăm pe 15 (o variantă)
• din mulţimea A_5 trebuie să îl eliminăm fie pe 7, fie pe 21 (2 variante)
• din mulţimea A_6 trebuie să îl eliminăm fie pe 8, fie pe 24 (2 variante)
• din mulţimea A_7 trebuie să îl eliminăm fie pe 10, fie pe 30 (2 variante)
• din mulţimea A_8 trebuie să îl eliminăm fie pe 11, fie pe 33 (2 variante)
• din mulţimea A_9 trebuie să îl eliminăm fie pe 13, fie pe 39 (2 variante)
• din mulţimea A_{10} trebuie să îl eliminăm fie pe 14, fie pe 42 (2 variante)
• din mulţimea A_{11} trebuie să îl eliminăm fie pe 16, fie pe 48 (2 variante)
Conform regulii produsului, putem face eliminările în $3 \cdot 2^7 = 384$ de moduri, deci sunt 384 de mulţimi superspeciale.

Problema 4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $20^x + 13^y = 2013^z$.

* * *

Soluţia 1:
Vom arăta că ecuaţia nu are soluţii. Presupunem că (x, y, z) este o soluţie a ecuaţiei din enunţ. Evident, $z = 0$ nu convine. Privim mai întâi ecuaţia modulo 3. Dacă $z \geq 1$, 2013^z este divizibil cu 3, iar $13^y = (12+1)^y = (M3+1)^y = M3+1^y = M3+1$. Deducem că $20^x = M3 - 1$. Dar $20^x = (21 - 1)^x = (M3 - 1)^x = M3 + (-1)^x$, de unde deducem că x este impar.
Examinăm acum ecuaţia modulo 7. Avem $20^x = (21 - 1)^x = (M7 - 1)^x = M7 + (-1)^x = M7 - 1$ şi $13^y = (14 - 1)^y = (M7 - 1)^y = M7 + (-1)^y$, prin urmare numărul $20^x + 13^y$ dă, în funcţie de paritatea lui y, unul dintre resturile 0 şi 5 la împărţirea cu 7. Pe de altă parte, $2013^z = (2009 + 4)^z = (M7 + 4)^z = M7 + 4^z$.
• Dacă $z = 3k$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $4^z = 4^{3k} = 64^k = (63 + 1)^k = (M7 + 1)^k = M7 + 1$, deci $2013^z = M7 + 1$, prin urmare în acest caz nu avem soluţie.
• Dacă $z = 3k+1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $4^z = 4^{3k+1} = 4 \cdot 64^k = 4 \cdot (63+1)^k = 4 \cdot (M7+1)^k = M7 + 4$, deci $2013^z = M7 + 4$, prin urmare nici în acest caz nu avem soluţie.
• Dacă $z = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $4^z = 4^{3k+2} = 16 \cdot 64^k = 16 \cdot (63 + 1)^k = 16 \cdot (M7 + 1)^k = M7 + 2$, deci $2013^z = M7 + 2$, prin urmare în acest caz nu avem soluţie.
În concluzie, ecuaţia dată nu are soluţii în mulţimea numerelor naturale.

Soluţia 2: (*Daniel Bociat, Alexandru Rudi*)
Vom analiza ecuaţia modulo 61. Cu $z = 0$, ecuaţia nu are soluţii căci $20^x + 13^y > 1$. Dacă (x, y, z) este o soluţie a ecuaţiei cu $z \geq 1$, atunci $61 \mid 2013^z$ (căci $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$).
Observăm că $20^5 \equiv 1 \pmod{61}$, deci 20^x dă, în funcţie de restul împărţirii la 5 al

lui x, unul din resturile 1, 20, 34, 9, 58 la împărţirea prin 61.
Cum $13^3 \equiv 1 \pmod{61}$, 13^y va da, în funcţie de restul împărţirii la 3 a exponentului, unul din resturile 1, 13, 47 la împărţirea prin 61.
În fine, remarcăm că nicio combinaţie de resturi nu dă prin adunare un multiplu de 61, deci $20^x + 13^y \not\equiv 0 \pmod{61}$ în vreme ce $2013^z \equiv 0 \pmod{61}$, deci ecuaţia nu are soluţii.