Problema 1. Fie n un număr natural nenul, iar $A = \underbrace{999\ldots9}_{n \text{ cifre}}$.

Aflaţi suma cifrelor lui A^3.

* * *

Soluţie:
Avem $A = 10^n - 1$, deci, folosind formula $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, obţinem

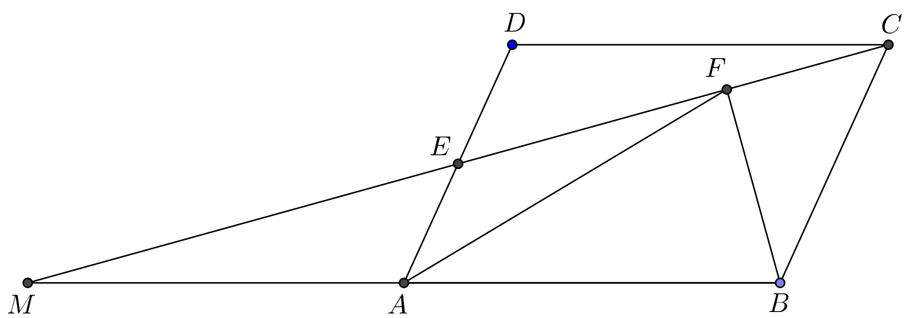
$$A^3 = (10^n - 1)^3 = 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1 = \underbrace{999\ldots9}_{n-1 \text{ cifre}}7\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ cifre}}2\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ cifre}}$$

care are suma cifrelor $9(n-1) + 7 + 0(n-1) + 2 + 9n = 18n$.

Problema 2. Fie E mijlocul laturii $[AD]$ a paralelogramului $ABCD$, iar F proiecţia lui B pe CE. Arătaţi că triunghiul ABF este isoscel.

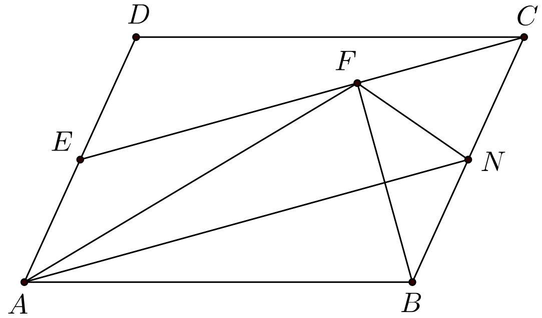
M.A. Bolchkevich, Turneul Oraşelor (Spring Junior O level) 2007 [1]

Soluţia 1: Fie $\{M\} = CE \cap AB$. Atunci $\Delta MAE \equiv \Delta CDE$ (ULU), de unde $MA = CD = AB$. Rezultă că $[FA]$ este mediană în triunghiul dreptunghic MBF, de unde rezultă $AF = \frac{1}{2}MB = AB$ şi concluzia.



[1] Pentru cazul $ABCD$ dreptunghi, problema s-a dat în 2003-2004 la Olimpiada Marii Britanii (runda 1).

Soluţia 2: Fie N mijlocul lui $[BC]$. $[FN]$ este mediană în triunghiul dreptunghic BCF, deci $BN = CN = FN$. Atunci $ANCE$ şi $ABNE$ sunt paralelograme. Deducem că $EF \parallel AN$, deci $AEFN$ este trapez isoscel, de unde rezultă că $AF = EN = AB$.



Problema 3. Fie $p > 3$ un număr prim. Arătaţi că numărul $7^p - 6^p - 1$ este divizibil cu 43.

Olimpiadă Iran, 1999

Soluţie: Orice număr prim $p > 3$ este fie de forma $6n + 1$, fie de forma $6n + 5$. Dacă $p = 6n + 1$, avem, modulo 43, că $7^p = 7 \cdot 7^{6n} = 7 \cdot 49^{3n} = 7 \cdot (43 + 6)^{3n} \equiv 7 \cdot 6^{3n} = 7 \cdot 216^n = 7 \cdot (43 \cdot 5 + 1)^n \equiv 7$ şi $6^p = 6 \cdot 6^{6n} = 6 \cdot 216^{2n} = 6 \cdot (5 \cdot 43 + 1)^{2n} \equiv 6 \pmod{43}$. Prin urmare, în acest caz, $7^p - 6^p - 1 \equiv 7 - 6 - 1 \equiv 0 \pmod{43}$.
Dacă $p = 6n + 5$, se arată analog că $7^{6n} \equiv 1 \pmod{43}$ şi $6^{6n} \equiv 1 \pmod{43}$, deci $7^{6n+5} - 6^{6n+5} - 1 \equiv 7^5 - 6^5 - 1 \equiv 0 \pmod{43}$, ultima echivalenţă verificându-se, de exemplu, prin calcul.

O altă cale de a demonstra că $7^5 - 6^5 - 1 \equiv 0 \pmod{43}$, evitând calculele, este de a folosi că

dacă $(m, n) = 1$, atunci $a \equiv b \pmod{m}$ este echivalent cu $an \equiv bn \pmod{m}$.

Atunci $7^5 - 6^5 - 1 \equiv 0 \pmod{43}$ este echivalent cu $42(7^5 - 6^5 - 1) \equiv 0 \pmod{43}$ adică, folosind că $7^6 \equiv 6^6 \equiv 1 \pmod{43}$, este echivalent cu $6 - 7 - 42 \equiv 0 \pmod{43}$, ceea ce este evident.

Observaţie: Rezolvarea de mai sus este valabilă pentru orice numere naturale care dau rest 1 sau 5 la împărţirea cu 6, faptul că p este prim neavând o relevanţă prea mare.
Problema se găseşte la pagina 57 în cartea
Laurenţiu Panaitopol, Alexandru Gica – *Probleme de aritmetică şi teoria numerelor. Idei şi metode de rezolvare*, Ed. GIL, 2006.

Problema 4. Care este cel mai mic număr natural nenul care se scrie atât ca suma a 2015 numere naturale care au o aceeaşi sumă a cifrelor, cât şi ca suma a 2016 numere naturale care au o aceeaşi sumă a cifrelor? (Suma cifrelor numerelor din prima sumă şi suma cifrelor numerelor din cea de-a doua sumă nu trebuie să fie neapărat egale.)

* * *

Soluţie:
Pentru un număr natural N vom nota cu $s(N)$ suma cifrelor sale. Se ştie că $s(N) \equiv N \pmod 9$, $\forall\, N \in \mathbb{N}$.
Fie n numărul căutat. Atunci există $a_1, a_2, \ldots, a_{2015}$ cu $s(a_1) = s(a_2) = \ldots = s(a_{2015}) = s$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_{2016}$ cu $s(b_1) = s(b_2) = \ldots = s(b_{2016}) = s'$ astfel ca $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2015} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{2016}$.
Atunci $n \equiv s(b_1) + s(b_2) + \ldots + s(b_{2016}) = 2016s' \equiv 0 \pmod 9$, deci $9 \mid n$. Dar $n \equiv s(a_1) + s(a_2) + \ldots + s(a_{2015}) = 2015s \pmod 9$ şi $(2015, 9) = 1$ implică $9 \mid s$. Cum $s \neq 0$, rezultă $s \geq 9$, deci $a_i \geq 9$, de unde $n \geq 2015 \cdot 9 = 18135$.
Vom arăta că numărul căutat este chiar 18135. Evident el se scrie $a_1+a_2+\ldots+a_{2015}$ cu $a_i = 9$, $\forall\, i = \overline{1, 2015}$.
Vom arăta în continuare că el se scrie ca $b_1 + b_2 + \ldots + b_{2016}$, cu $b_j \in \{1,\ 10\}$ (deci cu $s(b_j) = 1$, $\forall\, j$).
Alegând $b_1 = b_2 = \ldots = b_k = 10$ şi $b_{k+1} = b_{k+2} = \ldots = b_{2016} = 1$, trebuie ca $b_1 + b_2 + \ldots + b_{2016} = 2016 + 9k = 18135$. Rezultă $k = 1791$, deci 18135 se scrie ca suma a 2016 numere care au suma cifrelor 1.

Observaţie: Există numeroase alte alegeri ale numerelor $b_1, b_2, \ldots, b_{2016}$, nu numai cu $s' = 1$.

Comentariu: Enunţuri asemănătoare se pot concepe pentru $(m, m+1)$ în loc de $(2015, 2016)$. Dacă $9 \mid m$, se arată ca mai sus că $n \geq 9(m+1)$, dar exemplul este mult mai uşor de dat: $9(m+1) = \underbrace{9 + 9 + \ldots + 9}_{m+1 \text{ ori}} = 18 + \underbrace{9 + 9 + \ldots + 9}_{m-1 \text{ ori}}$.
Dacă $m = 9k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci minim este $2m$. Într-adevăr, $n \equiv sm \equiv s'(m+1) \pmod 9$, deci $s \equiv 2s' \pmod 9$. Dacă $s = 1$ atunci $s' \geq 2$, deci $n \geq 2(m+1) > 2m$. Dacă $s \neq 1$, atunci $s \geq 2$, deci $n \geq 2m$. Pe de altă parte, $2m = \underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{m \text{ ori}} = \underbrace{10 + 10 + \ldots + 10}_{k \text{ ori}} + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{8k+2 \text{ ori}}$.