Problema 1. Arătaţi că, pentru orice numere reale a şi b este adevărată inegalitatea

$$(1+a^2)(1+b^2) \geq a(1+b^2) + b(1+a^2).$$

Când are loc egalitatea?

Olimpiadă Slovenia, 2007

Soluţie:
Din $(a-1)^2 \geq 0$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$ rezultă $1 + a^2 \geq 2a$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a = 1$.
Înmulţind această relaţie cu $1 + b^2 > 0$ obţinem $(1+a^2)(1+b^2) \geq 2a(1+b^2)$, cu egalitate pentru $a = 1$. Analog rezultă că $(1+a^2)(1+b^2) \geq 2b(1+a^2)$, cu egalitate pentru $b = 1$. Adunând termen cu termen aceste ultime două inegalităţi, obţinem $2(1+a^2)(1+b^2) \geq 2a(1+b^2)+2b(1+a^2)$, de unde rezultă imediat inegalitatea din enunţ. Egalitatea are loc dacă $a = b = 1$.

Problema 2. În interiorul triunghiului ABC cu $m(\widehat{A}) = 90°$, $m(\widehat{B}) = 30°$, $m(\widehat{C}) = 60°$ considerăm punctul T astfel încât

$$m(\angle ATB) = m(\angle BTC) = m(\angle CTA) = 120°.$$

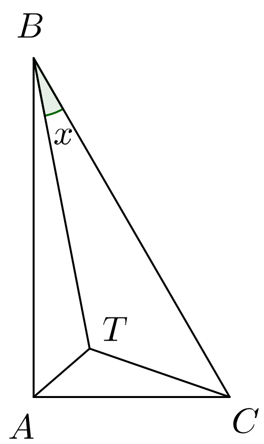
Arătaţi că $4TA = 2TC = TB$.

Leonard Giugiuc

Soluţie:
Dacă notăm $m(\angle TBC) = x$, obţinem succesiv $m(\angle TCB) = 60° - x$, $m(\angle TCA) = x$ şi $m(\angle TAC) = 60° - x$. Atunci triunghiurile BTC şi CTA au măsurile unghiurilor respectiv egale, deci ele sunt asemenea. Rezultă că

$$\frac{TA}{TC} = \frac{TC}{TB} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2},$$

ultima egalitate rezultând din teorema referitoare la cateta opusă unghiului de 30°. Din relaţiile de mai sus rezultă imediat că $TB = 2TC = 4TA$.



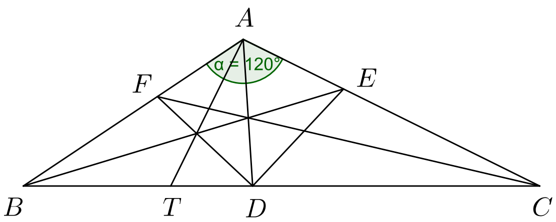
Observaţie. Punctul T din enunţul problemei se numeşte *punctul lui Torricelli* sau *punctul Torricelli-Fermat.* Acest punct există în orice triunghi cu unghiuri de măsuri mai mici decât $120°$. El are numeroase proprietăţi remarcabile, cea mai importantă fiind că $TA+TB+TC \leq PA+PB+PC$ pentru orice punct P din plan.

Problema 3. Se consideră un triunghi ABC cu $m(\angle BAC) = 120°$. Dacă D, E, F sunt picioarele bisectoarelor unghiurilor $\angle BAC$, $\angle CBA$, respectiv $\angle ACB$, arătaţi că unghiul EDF este drept.

Olimpiadă Marea Britanie, 2005

Soluţie: Fie punctul $T \in (BD)$ intersecţia bisectoarei unghiului $\angle BAD$ cu BC. Deoarece $m(\angle TAC) = m(\angle TAD) + m(\angle DAC) = 90°$, rezultă că $(AC$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\angle BAD$. Cum $(BE$ este bisectoarea unghiului $\angle ABD$, rezultă că $(DE$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\angle ADB$. Analog se arată că $(DF$ este bisectoarea unghiului $\angle ADB$, de unde concluzia.

Observaţie. O altă abordare, calculatorie, constă în a calcula, în funcţie de lungimile laturilor triunghiului, folosind teorema bisectoarei, segmentele determinate de D, E, F pe laturile triunghiului, apoi, cu teorema cosinusului, a lungimilor segmentelor $[DE]$, $[DF]$ şi $[EF]$ şi în folosirea reciprocii teoremei lui Pitagora pentru stabilirea concluziei. Calculele sunt însă laborioase şi metoda indicată depăşeşte poate nivelul actual de cunoştinţe al unui elev de clasa a VII-a.



Problema 4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia

$$11^n - 2^n = k^2.$$

Cristinel Mortici

Soluţie:
Pentru $n = 0$ obţinem $k = 0$, iar pentru $n = 1$, $k = 3$.
Vom arăta în continuare că ecuaţia nu are soluţii cu $n \geq 2$.
Presupunem că ar exista $n \geq 2$ pentru care ecuaţia are soluţie şi alegem n_0 cel mai mic $n \geq 2$ cu această proprietate. Cum $n_0 \geq 1$, membrul stâng este impar, deci

trebuie k impar. Atunci $k^2 \equiv 1 \pmod 4$, $2^{n_0} \equiv 0 \pmod 4$, iar $11^{n_0} \equiv (-1)^{n_0} \pmod 4$. Pentru ca $11^{n_0} + 2^{n_0} \equiv k^2 \pmod 4$ trebuie ca n_0 să fie par. Fie aşadar $m \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $n_0 = 2m$. Rezultă că $k^2 = (11^m - 2^m)(11^m + 2^m)$. Deoarece k este impar, numerele $11^m - 2^m$ şi $11^m + 2^m$ sunt prime între ele. Din relaţia precedentă rezultă atunci că $11^m - 2^m$ şi $11^m + 2^m$ trebuie să fie pătrate perfecte. Dacă $m \geq 2$ s-ar contrazice minimalitatea lui n_0. Rămâne $m = 1$, adică $n_0 = 2$, dar $11^2 - 2^2$ nu este pătrat perfect. Prin urmare, ecuaţia nu are soluţii (n, k) cu $n \geq 2$, singurele soluţii fiind $n = k = 0$ şi $n = 1$, $k = 3$.