Problema 1. Un pătrat 3×3 este completat cu numere naturale astfel încât sumele pe linii să crească cu 2 când parcurgem liniile de sus în jos, iar sumele pe coloane să se dubleze când parcurgem coloanele de la stânga la dreapta. Ştiind că suma numerelor de pe una din linii este 2014, aflaţi suma numerelor de pe coloana din stânga.

Concursul Náboj, Cehia şi Slovacia, 2011, prelucrare

Soluţie: Fie x suma numerelor de pe prima linie (cea de sus) şi y suma numerelor de pe prima coloană (cea din stânga). Suma numerelor de pe rândul 2 este $x+2$, cea a numerelor de pe rândul 3 este $x+4$. Suma numerelor de pe coloana a doua este $2y$, cea a numerelor de pe coloana a 3-a este $4y$. Aşadar suma tuturor numerelor înscrise în pătrat este $x+(x+2)+(x+4) = y+2y+4y$, de unde $3x+6 = 7y$. Ştim că $x = 2014$, $x+2 = 2014$ sau $x+4 = 2014$, adică $x \in \{2010, 2012, 2014\}$. Cum $3x+6 = 7y$ trebuie să fie divizibil cu 7, convine numai cazul cu $x = 2014$ care conduce la $y = 864$.

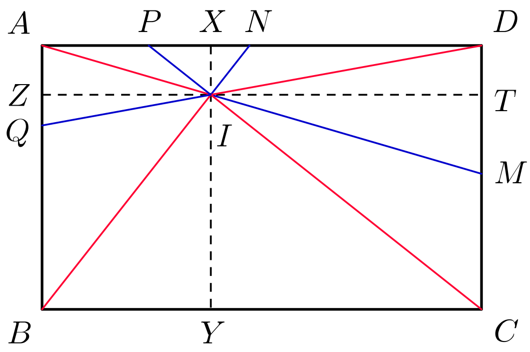
Observaţie: O asemenea completare există cu adevărat. Iată un exemplu:

287	576	1151	2014
288	576	1152	2016
289	576	1153	2018
864	1728	3456	

Problema 2. Punctul I se află în interiorul dreptunghiului $ABCD$. Dreptele AI, BI, CI şi DI intersectează a doua oară dreptunghiul în M, N, P şi respectiv Q. Arătaţi că $AI+BI+CI+DI \geq MI+NI+PI+QI$.
Când are loc egalitatea?

Leonard Giugiuc

Soluţia 1: Prin punctul I ducem paralele la laturile dreptunghiului: $XY \parallel AB$, $ZT \parallel AD$, $X \in AD$, $Y \in BC$, $Z \in AB$, $T \in CD$. Se formează astfel patru dreptunghiuri, iar punctele M, N, P, Q sunt pe laturile câte unuia din aceste dreptunghiuri:
M este pe una din laturile $[CT]$ şi $[CY]$ ale dreptunghiului $CTIY$, N este pe o latură a dreptunghiului $DXIT$, P este pe dreptunghiul $AZIX$, iar Q este pe dreptunghiul $BYIZ$. Deoarece cele mai lungi segmente care unesc două puncte ale unui dreptunghi sunt cele două diagonale, avem, din cele patru dreptunghiuri de mai sus, că $IM \leq IC$, $IN \leq ID$, $IP \leq IA$, $IQ \leq IB$, cu egalitate dacă $M = C$, $N = D$, $P = A$, $Q = B$. Prin adunare, obţinem $IM+IN+IP+IQ \leq IA+IB+IC+ID$, cu egalitate dacă $I = O$.



Soluţia 2: Fie O punctul de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului.

• Dacă I coincide cu O, punctele M, N, P, Q vor fi tocmai C, D, A şi respectiv B, deci inegalitatea din enunţ este în mod evident satisfăcută cu egalitate.

• Dacă I aparţine uneia dintre diagonalele dreptunghiului:
Putem presupune, de exemplu, că $I \in (OA)$. Celelalte cazuri sunt analoage.
În acest caz, $M = C$, $P = A$, $N \in (AD)$, $Q \in (AB)$; triunghiurile ABN şi QAD fiind dreptunghice, unghiurile $\sphericalangle ANB$ şi AQD sunt ascuţite, deci suplementele lor, $\sphericalangle BND$, respectiv $\sphericalangle BQD$ sunt obtuze. Prin urmare ele sunt unghiurile cele mai mari în triunghiurile NID, respectiv QID, deci lor li se opun laturile cele mai mari în aceste triunghiuri. Rezultă că $NI < DI$ şi $QI < BI$, deci $IM + IN + IP + IQ < IA + IB + IC + ID$.

• Dacă I nu se află pe nicio diagonală:
Putem presupune, de exemplu, că $I \in Int(\Delta OAD)$. Celelalte cazuri se tratează similar.
În acest caz, $P, N \in (AD)$, $M \in (CD)$, $Q \in (AB)$. Ca mai sus se arată imediat că unghiurile $\sphericalangle API$, $\sphericalangle BQI$, $\sphericalangle CMI$ şi $\sphericalangle DNI$ sunt obtuze, deci din triunghiurile API, BQI, CMI, DNI obţinem că $PI < AI$, $QI < BI$, $MI < CI$, $NI < DI$. Prin adunarea acestor relaţii obţinem că $MI + NI + PI + QI < AI + BI + CI + DI$.

În concluzie, am demonstrat că inegalitatea este valabilă în toate situaţiile şi că egalitate avem numai în cazul în care I este punctul de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului.

Problema 3. Determinaţi numerele naturale m şi n cu proprietatea că

$$3 \cdot 2^m + 13 = n^2.$$

* * *

Soluţie: Dacă n este par rezultă că $3 \cdot 2^m$ este impar, deci $m = 0$. În acest caz trebuie ca $n^2 = 3 + 13 = 16$, deci $n = 4$.
Dacă n este impar, $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, deci $n^2 = 4k(k+1)+1$ este un număr care dă restul 1 la împărţirea cu 8, deci $n^2 - 13 \equiv 4 \pmod 8$. Prin urmare trebuie ca $3 \cdot 2^m$ să fie divizibil cu 4 dar nu şi cu 8, adică $m = 2$. În acest caz, $n^2 = 12 + 13 = 25$, deci $n = 5$.
În concluzie, ecuaţia are două soluţii: $m = 0$, $n = 4$ şi $m = 2$, $n = 5$.

Problema 4. Pe un cerc sunt scrise 2014 numere, doi de 1 şi 2012 de 0. Se poate efectua următoarea operaţie: se alege un număr şi i se schimbă cei doi vecini din 0 în 1 şi invers. Făcând astfel de operaţii, putem să obţinem 2014 de 1 pe cerc?

Andrei Eckstein, prelucrare după o problemă dată la Olimpiada Rio Plata, 1997

Soluţie: Răspunsul depinde de poziţia celor două cifre de 1 de pe cerc. Dacă colorăm cele 2014 numere, alternativ, în alb şi negru, răspunsul este că dacă cele două cifre de 1 au aceeaşi culoare atunci nu putem face ca toate numerele de pe cerc să devină 1, în vreme ce în cazul în care cele două cifre de 1 au culori diferite, putem ajunge la configuraţia finală dorită.

Dacă 1-urile au aceeaşi culoare: să observăm că paritatea numărului de 1-uri negre este invariant la o operaţie. Orice operaţie vizează fie două numere negre fie două numere albe. Dacă ea vizează numere negre, numărul de 1-uri negre poate să crească cu 2 (dacă se schimbă două 0-uri negre în 1-uri), să scadă cu 2 (dacă se schimbă două 1-uri negre în 0-uri) sau să rămână neschimbat dacă se schimbă un 0 şi un 1 într-un 1 şi respectiv un 0. Dacă iniţial 1-urile au aceeaşi culoare, atunci avem fie zero fie două 1-uri negre, oricum un număr par. Prin urmare numărul de 1-uri negre de pe cerc va fi mereu par. La final, ar trebui să avem numai 1-uri, în particular 1007 1-uri negre, adică un număr impar. Acest lucru nu este posibil, deci nu putem ajunge la respectiva configuraţie.

Dacă 1-urile au culori diferite: să observăm că putem face cei doi de 1 să fie vecini. Într-adevăr, dacă iniţial ei nu sunt vecini, putem alege un 0 vecin cu un 1 şi face operaţia. Efectul este că 1-le se va ,,muta" în poziţia simetrică faţă de 0-ul ales. Repetând această manevră, putem face ca cei doi de 1 să devină vecini. Celelalte 2012 numere le grupăm acum câte 4. În fiecare din cele 503 grupe, alegem, pe rând, cele două cifre din mijloc şi facem operaţia. Cele două operaţii vor transforma grupa de patru 0-uri în patru de 1. Procedând astfel pentru fiecare grupă, vom transforma toate numerele de pe cerc în 1-uri.

Remarcă: Enunţul problemei originale date la Olimpiada Rio Plata:

Pe un cerc sunt scrise 1996 de 0 şi un 1. Singura operaţie permisă e să alegem un număr şi să-i schimbăm vecinii din 0 în 1 şi invers. Făcând astfel de operaţii, putem preschimba toate numerele de pe cerc în 1-uri? Dar dacă am fi pornit cu 1997 de 0 pe cerc?

Soluţie: Răspunsul este că dacă pornim cu 1996 de zerouri, putem ajunge să avem numai 1-uri, în vreme ce dacă pornim cu 1997 zerouri, nu putem.
Cu 1996 zerouri, le putem grupa în 499 grupe de câte 4, apoi facem operaţia alegând al doilea şi al treilea 0 din fiecare grup.
Cu 1997 zerouri, să observăm că numărul de cifre de 0 existente pe cerc nu-şi schimbă paritatea. Iniţial avem un număr impar de zerouri, 1997, deci nu putem ajunge la configuraţia în care să avem 0 zerouri (adică un număr par).