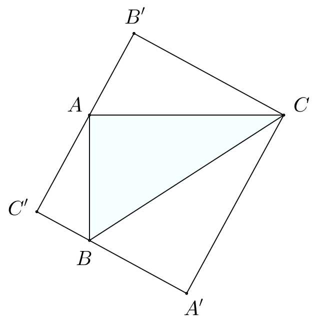
Problema 1. Demonstraţi că orice triunghi dreptunghic poate fi extins la un dreptunghi prin lipirea pe laturile sale, în exteriorul triunghiului, a trei triunghiuri dreptunghice asemenea între ele.

Concursul KöMaL, ianuarie 2009, problema **B. 4147**

Soluţie: Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Pe laturile acestuia, în exterior, vom construi triunghiurile dreptunghice $\Delta ABC' \sim \Delta CAB' \sim \Delta CBA'$, cu ipotenuzele AB, BC, CA şi $m(\angle ABC') = m(\angle CAB') = m(\angle CBA') = x$. Atunci $m(\angle BAC') = m(\angle CCB') = m(\angle BCA') = 90° - x$. Vrem să aflăm x astfel încât $B'C'A'C$ să fie dreptunghi. Din construcţie, $A \in (B'C')$. Pentru ca $B \in (C'A')$ trebuie ca $2x + m(\angle B) = 180°$, deci trebuie să alegem $x = 90° - \frac{m(\angle B)}{2}$. Cu această alegere, am extins triunghiul la un patrulater, $B'C'A'C$ care are trei unghiuri drepte, deci este dreptunghi.



Problema 2. Fiecare din 100 de numere date a fost mărit cu 1. Apoi, fiecare număr a fost mărit cu 1 încă o dată. Ştiind că prima oară suma pătratelor numerelor a rămas neschimbată, cum s-a modificat a doua oară suma pătratelor?

Turneul Oraşelor, 2014

Soluţie:
Dacă numerele iniţiale sunt $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$, atunci ştim că

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + \ldots + (x_{100} + 1)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$

adică

$$2(x_1 + x_2 + \ldots + x_{100}) + 100 = 0 \qquad (*).$$

După a doua incrementare a numerelor, suma pătratelor a devenit

$$(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 2)^2 + \ldots + (x_{100} + 2)^2.$$

Ea s-a modificat aşadar cu

$$(x_1+2)^2+(x_2+2)^2+\ldots+(x_{100}+2)^2-(x_1+1)^2+(x_2+1)^2+\ldots+(x_{100}+1)^2=$$

$$2(x_1+x_2+\ldots+x_{100})+300\overset{(*)}{=}200,$$

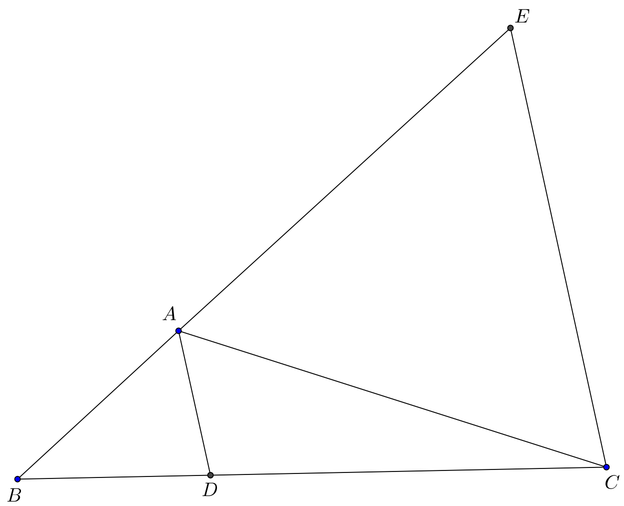
adică a crescut cu 200.

Problema 3. Fie ABC un triunghi în care $m(\angle A)=120^\circ$. Dacă punctul $D\in BC$ este piciorul bisectoarei unghiului $\angle A$, demonstraţi că

$$\frac{1}{AD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}.$$

* * *

Soluţia 1: Facem o construcţie inspirată de una din demonstraţiile clasice ale teoremei bisectoarei: considerăm punctul $E\in AB$ astfel încât $A\in(BE)$ şi $AE=AC$. Atunci $m(\angle CAE)=60^\circ$, deci triunghiul ACE este echilateral. Deoarece $\angle DAC\equiv\angle ACE$, rezultă $AD\parallel EC$. Din teorema fundamentală a asemănării, $\Delta\,BAD\sim\Delta\,BEC$, de unde $\dfrac{AD}{EC}=\dfrac{AB}{EB}$, adică $\dfrac{1}{AD}=\dfrac{EB}{AB\cdot EC}=\dfrac{AC+AB}{AB\cdot AC}=\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}$.



Soluţia 2: Dacă notăm cu $[MNP]$ aria unui triunghi MNP, avem

$$[ABC]=[ABD]+[ACD],$$

adică

$$\frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\widehat{BAC})}{2} = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin(\widehat{BAD})}{2} + \frac{AC \cdot AD \cdot \sin(\widehat{CAD})}{2}.$$

Deoarece $\sin(\widehat{BAC}) = \sin(\widehat{BAD}) = \sin(\widehat{CAD}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, deducem prin împărţire cu $\frac{AB \cdot AC \cdot AD}{2}$ relaţia cerută.

Problema 4. Determinaţi toate tripletele (a, b, c) de numere naturale nenule care verifică ecuaţia $6^a = 1 + 2^b + 3^c$.

test de selecţie, Franţa, 2014

Soluţie:
• Dacă $a \geq 3$ şi $b \geq 3$ atunci $8 \mid 6^a$, $8 \mid 2^b$ dar $1 + 3^c$ nu este multiplu de 8. Într-adevăr, dacă c este par, $c = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, atunci $1 + 3^c = 1 + 9^k = 1 + (8+1)^k = 1 + M_8 + 1^k = M_8 + 2$, iar dacă c este impar, $c = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $1 + 3^c = 1 + 3 \cdot 9^k = 1 + 3(8+1)^k = 1 + 3(M_8 + 1) = M_8 + 4$.
Aşadar trebuie fie $b \in \{1, 2\}$, fie $a \in \{1, 2\}$.
• Dacă $a = 1$, atunci $6 = 1 + 2^1 + 3^1$ este singura posibilitate (pentru orice alte alegeri ale lui b, c membrul drept va fi mai mare ca 6).
Aşadar $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ este soluţie.
• Dacă $a = 2$ rezultă $c \in \{1, 2, 3\}$ (căci $3^4 > 36$). Pentru $c = 1$ rezultă $b = 5$, pentru $c = 3$ rezultă $b = 3$, iar pentru $b = 2$ nu avem soluţie. Am mai găsit soluţiile $(a, b, c) = (2, 5, 1)$ şi $(a, b, c) = (2, 3, 3)$.
• Dacă $b = 1$ şi $a, c \geq 2$ atunci ecuaţia $6^a = 3 + 3^c$ nu are soluţii ($9 \mid 6^a$ şi $9 \mid 3^c$ dar $9 \nmid 3$). Dacă $c = 1$, ecuaţia revine la $6^a = 3 + 3$, adică $a = 1$, soluţie pe care am mai găsit-o într-un caz anterior.
• Dacă $b = 2$ atunci ecuaţia revine la $6^a = 5 + 3^b$ care nu are soluţii ($3 \mid 6^a$ şi $3 \mid 3^c$ dar $3 \nmid 5$).
În concluzie, ecuaţia are trei soluţii: $(1, 1, 1)$, $(2, 5, 1)$ şi $(2, 3, 3)$.