Problema 1. Pătrăţelele unei table 9×9 sunt completate cu numerele de la 460 la 540, începând din colţul din stânga-sus şi continuând de la stânga la dreapta, rând după rând. Avem o bucată de carton în formă de ,,L" care acoperă patru pătrăţele ale tablei. Este posibil să plasăm cartonul astfel încât suma celor patru numere scrise în pătrăţelele acoperite de acesta să fie 2013?

concurs Ungaria, prelucrare

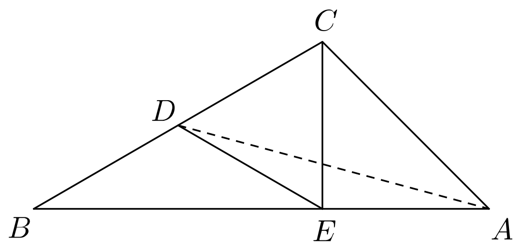
Soluţia 1:
Colorăm pătrăţelele tablei cu alb şi negru, alternativ, asemeni unei table de şah, cu pătrăţelul din stânga-sus colorat cu negru. Observăm atunci că în pătrăţelele negre sunt scrise numere pare, în vreme ce în pătrăţelele albe sunt scrise numere impare. Mai observăm şi că, oricum aşezăm bucata de carton (rotită sau chiar rotită şi întoarsă pe dos), bucata de carton acoperă două pătrăţele negre şi două albe. Prin urmare numerele acoperite de carton sunt două pare şi două impare, deci suma lor nu poate fi 2013.

Soluţia 2:
Dacă aşezăm bucata de carton ,,culcată", bucata de carton acoperă trei numere consecutive, x, $x+1$, $x+2$, (situate într-un rând) plus încă un număr situat fie în rândul precedent, fie în cel următor. Acest număr poate fi $x-9$, $x-7$, $x+9$ sau $x+11$. Suma celor patru numere poate fi $4x-6$, $4x-4$, $4x+12$ sau $4x+14$, deci pară, prin urmare nu poate fi 2013.
Dacă aşezăm bucata de carton ,,în picioare", ea acoperă trei numere de pe o aceeaşi coloană, x, $x+9$, $x+18$, plus încă un număr situat fie în coloana precedentă, fie în cea următoare. Acest număr poate fi $x-1$, $x+1$, $x+17$ sau $x+19$. Suma celor patru numere poate fi $4x+26$, $4x+28$, $4x+44$ sau $4x+46$, deci pară, prin urmare nu poate fi 2013.

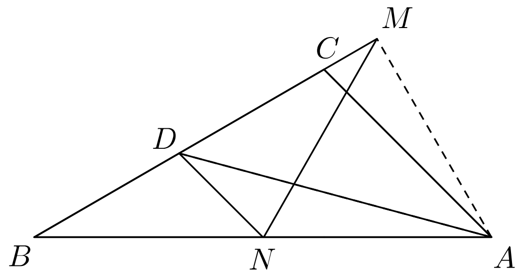
Problema 2. Se consideră triunghiul ABC având $m(\widehat{B}) = 30°$, $m(\widehat{C}) = 105°$ şi fie D mijlocul lui $[BC]$. Calculaţi $m(\angle BAD)$.

Manuela Prajea

Soluţia 1: Fie E piciorul înălţimii din C. Atunci $m(\angle BCE) = 60°$ şi $m(\angle ECA) = m(\angle EAC) = 45°$. Triunghiul CDE este echilateral (isoscel, $CD = DE$, cu un unghi de $60°$), iar ACE este dreptunghic isoscel, deci $DE = CE = AE$. Rezultă că triunghiul AED este isoscel, cu $m(\angle AED) = 150°$, de unde $m(\angle EAD) = 15°$.



Soluţia 2:
Fie M piciorul înălţimii din A şi N mijlocul laturii AB. Cum $m(\angle BAM) = 60°$, avem $MN = NA = AM = NB$ (căci triunghiul MAN, fiind isoscel cu un unghi de $60°$, este echilateral). Atunci MNB este triunghi isoscel, deci $m(\angle NMB) = 30°$. DN este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $m(\angle DNB) = 45°$, de unde rezultă că $m(\angle DNM) = 75°$. Din triunghiul DNM rezultă că $m(\angle MDN) = 75°$, de unde $MD = MN = MA$. Atunci triunghiul MDA este dreptunghic isoscel, deci $m(\angle MAD) = 45°$ şi $m(\angle BAD) = 15°$.



Problema 3. Se consideră un triunghi ABC şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CA)$. Demonstraţi că mediana din A a triunghiului AMP, mediana din B a triunghiului BNM şi mediana din C a triunghiului CPN sunt concurente dacă şi numai dacă dreptele AN, BP şi CM sunt concurente.

Marcel Chiriţă şi *Mihai Piticari*, ONM 1991, clasa a IX-a

Soluţia 1: Vom folosi următoarea
Lemă. Fie ABC un triunghi şi D mijlocul laturii BC. Un punct M aparţine dreptei AD dacă şi numai dacă $AB \cdot d(M, AB) = AC \cdot d(M, AC)$.
Demonstraţie.
Pentru comoditate, vom demonstra lema numai în cazul în care punctul M se găseşte pe semidreapta opusă lui $(DA$. Celelalte cazuri se tratează analog dar în rezolvarea problemei avem nevoie numai de acest caz. Dacă $M \in AD$, atunci $S_{MBD} = \dfrac{BD \cdot d(M, BC)}{2} = \dfrac{CD \cdot d(M, BC)}{2} = S_{MCD}$. În particular, avem şi $S_{ABD} = S_{ACD}$. Dacă $M \in AD \setminus (AD$, prin adunarea relaţiilor anterioare obţinem relaţia $S_{MAB} = S_{MAC}$. De aici rezultă $AB \cdot d(M, AB) = AC \cdot d(M, AC)$.
Reciproc, dacă punctul M verifică relaţia $AB \cdot d(M, AB) = AC \cdot d(M, AC)$, rezultă că $S_{MAB} = S_{MAC}$. Cum $S_{MBD} = S_{MCD}$ şi $S_{ABD} = S_{ACD}$, prin adunare obţinem că $S_{MBD} + S_{ABD} = S_{MCD} + S_{ACD}$. Comparând cu $S_{MAB} = S_{MAC}$ deducem că $S_{ADM} = 0$, adică $D \in AM$.

Să trecem la rezolvarea problemei.

Dacă cele trei mediane sunt concurente într-un punct G, conform lemei anterioare avem:

$$\frac{AM}{AP} = \frac{d(G, AC)}{d(G, AB)}, \ \frac{BN}{BM} = \frac{d(G, AB)}{d(G, BC)}, \ \frac{CP}{CN} = \frac{d(G, BC)}{d(G, AC)}. \quad (1)$$

Prin înmulţirea acestor trei relaţii rezultă

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP} = 1. \quad (2)$$

Conform reciprocei teoremei lui Ceva, rezultă că dreptele AN, BP, CM sunt concurente.
Reciproc, dacă dreptele AN, BP, CM sunt concurente, notând cu G punctul de intersecţia a medianelor din A şi B (în triunghiurile AMP, respectiv BNM), din relaţiile $\dfrac{AM}{AP} = \dfrac{d(G, AC)}{d(G, AB)}$, $\dfrac{BN}{BM} = \dfrac{d(G, AB)}{d(G, BC)}$ şi (2) deducem că avem şi $\dfrac{CP}{CN} = \dfrac{d(G, BC)}{d(G, AC)}$, adică G aparţine medianei din C a triunghiului CNP.

Soluţia 2:
O altă rezolvare se poate da folosind forma cu sinusuri a teoremei lui Ceva:

Teorema lui Ceva (forma cu sinusuri) Fie ABC un triunghi şi punctele A', B', C' pe laturile (BC), (CA) şi respectiv (AB) ale triunghiului. Atunci dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente dacă şi numai dacă

$$\frac{\sin(\angle A'AC)}{\sin(\angle A'AB)} \cdot \frac{\sin(\angle B'BA)}{\sin(\angle B'BC)} \cdot \frac{\sin(\angle C'CB)}{\sin(\angle C'CA)} = 1.$$

Demonstraţie.
Conform variantei clasice a teoremei lui Ceva, dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente dacă şi numai dacă

$$\frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{C'B}{C'A} = 1.$$

Exprimând cu ajutorul ariilor rapoartele care intervin în relaţia de mai sus, aceasta se scrie echivalent

$$\frac{\mathcal{S}(A'AC)}{\mathcal{S}(A'AB)} \cdot \frac{\mathcal{S}(B'BA)}{\mathcal{S}(B'BC)} \cdot \frac{\mathcal{S}(C'CB)}{\mathcal{S}(C'CA)} = 1,$$

sau încă

$$\frac{A'A \cdot AC \cdot \sin(\angle A'AC)}{A'A \cdot AB \cdot \sin(\angle A'AB)} \cdot \frac{B'B \cdot BA \cdot \sin(\angle B'BA)}{B'B \cdot BC \cdot \sin(\angle B'BC)} \cdot \frac{C'C \cdot CB \cdot \sin(\angle C'CB)}{C'C \cdot CA \cdot \sin(\angle C'CA)} = 1,$$

care, după simplificări revine la relaţia din enunţ.

Trecem acum la rezolvarea problemei.

Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor $[MP]$, $[MN]$, respectiv $[NP]$. Conform formei cu sinusuri a teoremei lui Ceva, dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente dacă şi numai dacă

$$\frac{\sin(\angle A_1AC)}{\sin(\angle A_1AB)} \cdot \frac{\sin(\angle B_1BA)}{\sin(\angle B_1BC)} \cdot \frac{\sin(\angle C_1CB)}{\sin(\angle C_1CA)} = 1. \qquad (1)$$

Deoarece AA_1 este mediană în triunghiul AMP, rezultă că $\mathcal{S}(A_1AM) = \mathcal{S}(A_1AP)$, adică $AM \cdot A_1A \cdot \sin(\angle A_1AM) = AP \cdot A_1A \cdot \sin(\angle A_1AP)$, sau $\dfrac{\sin(\angle A_1AC)}{\sin(\angle A_1AB)} = \dfrac{AM}{AP}$. Scriind şi relaţiile analoage şi înlocuind în (1) obţinem că relaţia (1) este echivalentă cu $\dfrac{AM}{AP} \cdot \dfrac{CP}{CN} \cdot \dfrac{BM}{BN} = 1$, ceea ce, din nou cu teorema lui Ceva (forma clasică), este echivalent cu faptul că dreptele AN, BP, CM sunt concurente.

Problema 4. În fiecare pătraţel al unei table 10×10 se scrie câte un număr întreg astfel încât diferenţa dintre oricare două numere scrise în pătrăţele vecine să fie cel mult 5 (două pătrăţele sunt considerate vecine dacă au o latură comună). Demonstraţi că două dintre numere trebuie să fie egale.

din cartea *Russian Experience,* de D. Fomin, S. Genkin şi I. Itenberg

Soluţie:
Putem ajunge din oricare pătrăţel al tablei în oricare altul trecând numai prin pătrăţele învecinate. Mai mult, între oricare două pătrăţele ale tablei există un ,,drum", format din cel mult 19 pătrăţele, care trece numai prin pătrăţele vecine. Acest lucru înseamnă că diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic număr scris pe tablă este cel mult 90. Prin urmare în pătrăţelele tablei pot figura cel mult 91 de numere distincte. Fiind 100 de pătrăţele, din principiul cutiei rezultă că printre numerele scrise în pătrăţelele tablei se vor găsi şi numere egale.