Problema 1. Determinaţi numerele naturale n care se pot scrie ca produs de trei numere de forma $\dfrac{2k+1}{k+1}$ cu $k \in \mathbb{N}$.

$*\ *\ *$

Soluţie: Să observăm mai întâi că dacă $n = \dfrac{2a+1}{a+1} \cdot \dfrac{2b+1}{b+1} \cdot \dfrac{2c+1}{c+1}$, cu $a, b, c \in \mathbb{N}$, atunci $n < 8$ şi n este impar. Într-adevăr, avem că $\dfrac{2k+1}{k+1} < 2$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, de unde $n < 8$. Apoi, cum $n(a+1)(b+1)(c+1) = (2a+1)(2b+1)(2c+1)$ şi membrul drept este impar, rezultă că şi membrul stâng este impar, deci n este impar (iar a, b, c pare). Prin urmare singurele numere naturale care se pot, eventual, scrie sub forma dorită sunt 1, 3, 5 şi 7.
În continuare vom demonstra că fiecare din aceste numere se poate scrie sub forma dorită:

- $1 = \dfrac{2a+1}{a+1} \cdot \dfrac{2b+1}{b+1} \cdot \dfrac{2c+1}{c+1}$, cu $a = b = c = 0$,
- $3 = \dfrac{2a+1}{a+1} \cdot \dfrac{2b+1}{b+1} \cdot \dfrac{2c+1}{c+1}$, cu $a = 0,\ b = 2,\ c = 4$ (adică $3 = 1 \cdot \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{9}{5}$),
- $5 = \dfrac{2a+1}{a+1} \cdot \dfrac{2b+1}{b+1} \cdot \dfrac{2c+1}{c+1}$, cu $a = b = 2,\ c = 4$ (adică $5 = \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{9}{5}$),
- $7 = \dfrac{2a+1}{a+1} \cdot \dfrac{2b+1}{b+1} \cdot \dfrac{2c+1}{c+1}$, cu $a = 6,\ b = 12,\ c = 24$ (adică $7 = \dfrac{13}{7} \cdot \dfrac{25}{13} \cdot \dfrac{49}{25}$).

(Ultima scriere o putem găsi căutând o scriere de forma $n = \dfrac{2a+1}{a+1} \cdot \dfrac{4a+1}{2a+1} \cdot \dfrac{8a+1}{4a+1}$.)

În concluzie, numerele naturale care se scriu ca produs de 3 fracţii de forma dorită sunt $1, 3, 5$ şi 7.

Observaţie: Această problemă este de fapt un caz particular al problemei 3 de la OIM 1998. Problema avea următorul enunţ:
Pentru orice număr natural nenul n, notăm cu $\tau(n)$ numărul divizorilor săi pozitivi (inclusiv 1 şi n). Determinaţi toate numerele naturale nenule care m pentru care există un număr natural nenul n astfel încât $\frac{\tau(n^2)}{\tau(n)} = m$.

Într-adevăr, dacă $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_j^{a_j}$, unde $p_1, p_2, \ldots, p_j$ sunt numere prime distincte, iar $a_i \in \mathbb{N}$, atunci $\tau(n) = (a_1+1)(a_2+1) \cdot \ldots \cdot (a_j+1)$, iar $\tau(n^2) = (2a_1+1)(2a_2+1) \cdot \ldots \cdot (2a_j+1)$. Prin urmare, condiţia $\frac{\tau(n^2)}{\tau(n)} = m$ revine la $m = \dfrac{2a_1+1}{a_1+1} \cdot \dfrac{2a_2+1}{a_2+1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2a_j+1}{a_j+1}$, adică la a-l scrie pe m ca produs de numere de forma $\dfrac{2k+1}{k+1}$ cu $k \in \mathbb{N}$.

În general, se poate arăta că orice număr impar mai mic decât 2^j poate fi scris ca produs de j fracţii de forma $\dfrac{2k+1}{k+1}$.

Problema 2. Cum se poate scrie 2014 ca sumă de numere întregi consecutive? Găsiţi toate scrierile posibile.

Propunere a României pentru OIM în anii 1960, prelucrare

Soluţie:
Fie $n+1, n+2, \dots n+m$, cu $n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}^*$ numere întregi consecutive care au suma 2014.
Atunci $(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+m) = 2014$, adică $nm + \dfrac{m(m+1)}{2} = 2014$.
Obţinem ecuaţia $m(2n+m+1) = 4028$.
Observând că m şi $2n+m+1$ au parităţi diferite, $m > 0$ (deci trebuie ca şi $2n+m+1 > 0$) şi m este un divizor al lui $4028 = 2^2 \cdot 19 \cdot 53$, obţinem că $m \in \{1, 4, 19, 53, 76, 212, 1007, 4028\}$. (Ceilalţi divizori nu convin pentru că ei conduc la $2n+m+1$ şi m de aceeaşi paritate.)

- $m = 1$ implică $2n+m+1 = 4028$, deci $n = 2013$; obţinem scrierea $2014 = 2014$;
- $m = 4$ implică $2n+m+1 = 1007$, deci $n = 501$;
  obţinem scrierea $2014 = 502 + 503 + 504 + 505$;
- $m = 19$ implică $2n+m+1 = 212$, deci $n = 96$;
  obţinem scrierea $2014 = 97 + 98 + \ldots + 115$;
- $m = 53$ implică $2n+m+1 = 76$, deci $n = 11$;
  obţinem scrierea $2014 = 12 + 13 + \ldots + 64$;
- $m = 76$ implică $2n+m+1 = 53$, deci $n = -12$;
  obţinem scrierea $2014 = -11 - 10 - ... - 1 + 0 + 1 + ... + 64$;
- $m = 212$ implică $2n+m+1 = 19$, deci $n = -97$;
  obţinem scrierea $2014 = -96 - 95 - \ldots - 1 + 0 + 1 + \ldots + 115$;
- $m = 1007$ implică $2n+m+1 = 4$, deci $n = -502$;
  obţinem scrierea $2014 = -501 - 500 - \ldots - 1 + 0 + 1 + \ldots + 505$;
- $m = 4028$ implică $2n+m+1 = 1$, deci $n = -2014$;
  obţinem scrierea $2014 = -2013 - 2012 - \ldots - 1 + 0 + 1 + \ldots + 2014$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi şi $M \in (BC)$, $N \in (CA)$, $P \in (AB)$ puncte astfel încât AM, BN şi CP sunt concurente într-un punct T. Ştiind că ariile $\mathcal{S}(TPB) = 14$, $\mathcal{S}(TBM) = 18$, $\mathcal{S}(TMC) = 24$ şi $\mathcal{S}(TCN) = 21$, aflaţi aria triunghiului ABC.

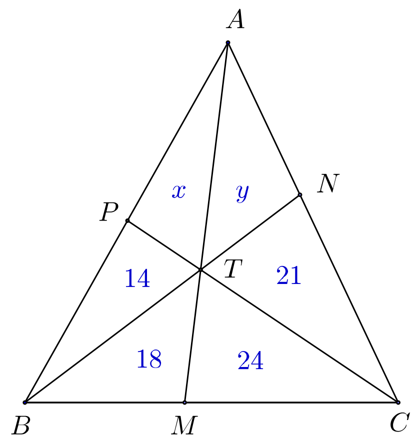
* * *

Soluţie:

Notâm cu $x = \mathcal{S}(APT)$ şi $y = \mathcal{S}(NAT)$.

Avem că $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{MB \cdot d(A, BC)}{MC \cdot d(A, BC)} = \dfrac{2\mathcal{S}(AMB)}{2\mathcal{S}(AMC)} = \dfrac{18 + 14 + x}{24 + 21 + y} = \dfrac{32 + x}{45 + y}$, iar, pe de altă parte, $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{MB \cdot d(T, BC)}{MC \cdot d(T, BC)} = \dfrac{2\mathcal{S}(TMB)}{2\mathcal{S}(TMC)} = \dfrac{18}{24} = \dfrac{3}{4}$. Din cele două relaţii de mai sus, deducem că $\dfrac{32 + x}{45 + y} = \dfrac{3}{4}$ (1).

Analog, scriind în două moduri raportul $\dfrac{NC}{NA}$, obţinem $\dfrac{18 + 24 + 21}{14 + x + y} = \dfrac{21}{y} = \dfrac{18 + 24}{14 + x} = \dfrac{42}{14 + x}$, de unde $2y = 14 + x$, deci $x = 2y - 14$. Revenind la relaţia (1), obţinem $4(32 + 2y - 14) = 3(45 + y)$, de unde $y = \dfrac{63}{5} = 12,6$. Atunci $x = 2y - 14 = 11,2$, iar aria triunghiului ABC este $\mathcal{S}(ABC) = x + y + 21 + 24 + 18 + 14 = 100,8$.



Remarcă: Scriind în două moduri şi raportul $\dfrac{AP}{PB}$ am fi obţinut o a treia relaţie în x, y, anume $\dfrac{x + y + 21}{14 + 18 + 24} = \dfrac{x}{14}$. Şi această ecuaţie este verificată de valorile găsite pentru x şi y astfel încât pentru aflarea valorilor lui x şi y am fi putut folosi oricare două din cele trei ecuaţii. Faptul că aceste trei relaţii sunt legate se datorează teoremei lui Ceva: avem $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$, adică $\frac{x}{14} \cdot \frac{18}{24} \cdot \frac{21}{y} = 1$ şi, totodată, $\frac{x+y+21}{14+18+24} \cdot \frac{18+14+x}{24+21+y} \cdot \frac{18+24+21}{14+x+y}$. Astfel, dacă impunem două dintre condiţiile $\frac{18}{24} = \frac{18+14+x}{24+21+y}$, $\frac{21}{y} = \frac{18+24+21}{14+x+y}$ şi $\frac{x}{14} = \frac{x+y+21}{14+18+24}$, cea de-a treia rezultă în mod automat.

Problema 4. Doi copii, Alina şi Bogdan, joacă următorul joc. Pe tablă sunt scrise numerele de la 1 la n. Cei doi copii, începând cu Alina, şterg, alternativ, câte un număr de pe tablă, până când pe tablă rămân două numere. Dacă suma numerelor rămase pe tablă este divizibilă cu 3, câştigă Alina; în caz contrar, câştigă Bogdan. Cine câştigă la joc corect dacă:
a) $n = 2014$;
b) $n = 2013$.

* * *

Soluţie:
a) Bogdan are strategie câştigătoare. De exemplu, el poate grupa numerele de pe tablă în perechi cu suma 2015: $(1, 2014)$, $(2, 2013)$, $\ldots$, $(1007, 1008)$. Dacă Alina şterge unul din numerele ce compun o anumită pereche, Bogdan îl şterge pe celălalt. Atunci când îi vine rândul, Alina este obligată să ,,înceapă” de fiecare dată o pereche nouă. După ce copii au şters câte 1006 numere, pe tablă a rămas o pereche ,,completă” $(k, 2015 - k)$, deci, procedând astfel, Bogdan a făcut ca suma celor două numere rămase pe tablă să fie 2015, care nu este divizibil cu 3, lucru care i-a asigurat victoria.
b) De această dată Alina are strategie câştigătoare. De exemplu, ea poate începe prin a şterge numărul 2013 de pe tablă. Alina poate acum grupa numerele rămase pe tablă în perechi cu suma 2013: $(1, 2012), (2, 2011), \ldots, (1006, 1007)$. De astă dată Bogdan va fi cel care începe fiecare pereche şi Alina va şterge mereu celălalt număr din pereche. Ultimele două numere vor forma o pereche completă de forma $(k,\ 2013 - k)$, deci suma lor va fi 2013, multiplu de 3, ceea ce îi va asigura Alinei victoria.