Problema 1. Numerele întregi a, b, c, d satisfac $|ac + bd| = |ad + bc| = 1$. Demonstraţi că fie $|a| = |b| = 1$, fie $|c| = |d| = 1$.

Olimpiadă Estonia, 2001

Soluţie:
Din condiţia $|ac+bd| = |ad+bc|$ rezultă că fie $ac+bd = ad+bc$, fie $ac+bd = -(ad+bc)$. Prima din aceste relaţii se scrie echivalent $(a-b)(c-d) = 0$, iar cea de-a doua $(a+b)(c+d) = 0$. Prin urmare avem patru variante: $a = b$, $c = d$, $a = -b$ sau $c = -d$.
• Dacă $a = b$, atunci $1 = |ac+bd| = |ac+ad| = |a| \cdot |c+d|$, deci $|a|$ îl divide pe 1, deci $|a| = |b| = 1$.
• Dacă $c = d$, atunci $1 = |ac+bd| = |ac+bc| = |c| \cdot |a+b|$, deci $|c|$ îl divide pe 1, deci $|c| = |d| = 1$.
• Dacă $a = -b$, atunci $1 = |ac+bd| = |ac-ad| = |a| \cdot |c-d|$, deci $|a|$ îl divide pe 1, deci $|a| = |b| = 1$.
• Dacă $c = -d$, atunci $1 = |ac+bd| = |ac-bc| = |c| \cdot |a-b|$, deci $|c|$ îl divide pe 1, deci $|c| = |d| = 1$.

Problema 2. Dintre numerele naturale de două cifre, care este cel mai mare care se poate scrie sub forma $x \cdot [x]$, cu $x \in \mathbb{R}_+$? Dar cu $x \in \mathbb{R}$?

prelucrare *Andrei Eckstein* a unei probleme date la Concursul Náboj, Cehia şi Slovacia, 2009

Soluţie:
Dacă $x \in \mathbb{R}_+$ atunci $x \cdot [x] = ([x] + \{x\}) \cdot [x] \geq [x]^2$, deci dacă $[x] \geq 10$ atunci $x \cdot [x] \geq 100$. Prin urmare, pentru a obţine numere de două cifre, trebuie ca $[x] \leq 9$. Atunci $x \cdot [x] = ([x]+\{x\}) \cdot [x] < (9+1) \cdot 9 = 90$, deci cel mai mare număr de două cifre care se poate eventual obţine este 89. Pentru a găsi $x \in \mathbb{R}_+$ cu $x \cdot [x] = 89$ este suficient să alegem $[x] = 9$. Găsim $x = \dfrac{89}{9} = 9\dfrac{8}{9}$ care are într-adevăr $[x] = 9$. Aşadar, cel mai mare număr de două cifre care se scrie sub forma dorită este 89.

Dacă $x < 0$ atunci $[x] \leq x < [x] + 1$ implică, prin înmulţire cu $[x] < 0$, că $[x]^2 \geq x \cdot [x] > [x]^2 + [x]$. Pentru a obţine numere mai mari decât în cazul cu $x \geq 0$ trebuie să alegem $[x] = -10$. Îl putem obţine chiar pe 99 dacă alegem $x = -9,9$. Aşadar, în acest caz, maximul căutat este 99.

Observaţie: Procedând ca mai sus, se poate arăta că un număr real y se scrie sub forma $x \cdot [x]$ cu $x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $y \geq 0$ şi $y \notin \{1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ \ldots\}$.

Problema 3. Soţia mea şi cu mine am participat recent la o petrecere la care au mai fost alte patru perechi soţ-soţie. S-au făcut diverse strângeri de mână. Nimeni nu a dat mâna cu sine însuşi, nici cu soţul/soţia lui şi nimeni nu a dat mâna de mai multe ori cu o aceeaşi persoană. După ce toate strângerile de mână s-au încheiat, l-am întrebat pe fiecare din invitaţii ceilalţi, inclusiv pe soţia mea, câte mâini a strâns. Spre surprinderea mea, cele 9 răspunsuri primite au fost toate diferite. Câte mâini a strâns soţia mea?

$*\ *\ *$

Soluţie:
Niciun invitat nu a putut strânge mai mult de 8 mâini, deci răspunsurile oferite de ceilalţi nouă invitaţi la întrebarea mea au fost 0, 1, 2, . . . , 8. Persoana care a strâns 8 mâini a strâns mâna tuturor invitaţilor cu excepţia sa şi a soţului său/soţiei sale, deci persoana care a strâns 0 mâini trebuie să fi fost soţia sa/soţul său. Toată lumea are o strângere de mână cu acest prim cuplu.
Să privim persoana care are 7 strângeri de mână. Ea a strâns mâna tuturor, cu excepţia sa, a soţului/soţiei şi a persoanei care are 0 strângeri de mână. Persoana care are o strângere de mână, a strâns mâna cu persoana care strâns 8 mâni, deci nu i-a strâns mâna celui cu 7 strângeri de mână. Ea trebuie deci să fie căsătorită cu persoana care are 7 strângeri de mână. Am identificat aşadar un al doilea cuplu. Toată lumea (rămasă) are două strângeri de mână cu membrii acestor prime două cupluri.
Privim acum persoanele care au 6, respectiv 2 strângeri de mână. Persoana care are 6 strângeri de mână nu a strâns mâinile celor care au strâns 0 şi 1 mâini şi nu i-a strâns mâna soţului/soţiei, deci persoana cu 2 strângeri de mână (realizate cu campionii la strâns mâna), trebuie să fie soţia/soţul acestei persoane. Am identificat un al treilea cuplu.
Analog, persoana care are la activ 5 strângeri de mână trebuie să fie căsătorită cu persoana care a strâns 3 mâini.
Rezultă aşadar că persoana care a strâns 4 mâini este soţia mea.

Dar eu, oare câte mâini oi fi strâns?

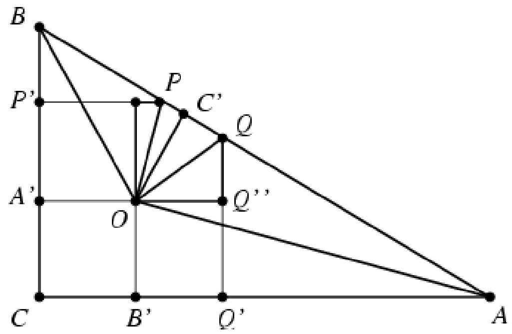
Problema 4. Triunghiul ABC este dreptunghic în C. Notăm cu O punctul de intersecţie a bisectoarelor sale. Perpendicularele în O pe OA şi OB intersectează ipotenuza $[AB]$ în punctele P, respectiv Q. Dacă P' şi Q' sunt picioarele perpendicularelor duse din P pe BC, respectiv din Q pe AC, demonstraţi că punctele P', Q' şi O sunt coliniare.

Concursul KöMaL, decembrie 2006

Soluţia 1: (oficială în concursul KöMaL)
Fie A', B', C' şi Q'' proiecţiile punctului O pe segmentele $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, respectiv $[QQ']$. Atunci $OA' = OB' = OC' = r$, unde r este raza cercului înscris. Triunghiurile $C'OQ$ şi OBQ sunt triunghiuri dreptunghice asemenea, adică unghiurile $\angle C'OQ$ şi $\angle OBQ$, care are măsura jumătate din măsura unghiului $\angle ABC$, sunt congruente. Pe de altă parte, $OC' \perp AB$ şi $OQ'' \perp BC$, adică $\angle C'OQ'' \equiv \angle ABC$.

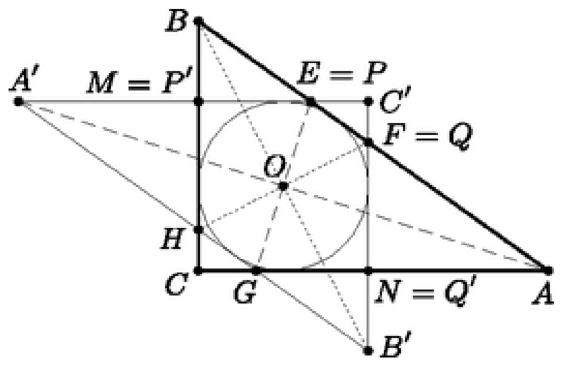
Astfel avem şi că $m(\angle QOQ'') = \frac{1}{2}\, m(\angle ABC)$.

Atunci triunghiurile dreptunghice $C'OQ$ şi $Q''OQ$ sunt congruente, adică $OQ'' = OC' = r$, de unde rezultă că $B'Q' = OQ'' = r = OB'$, deci triunghiul $OB'Q'$ este un triunghi dreptunghic isoscel cu catetele r. Aceeaşi afirmaţie este adevărată şi pentru triunghiul $P'A'O$. Deoarece catetele celor două triunghiuri sunt paralele două câte două, la fel vor fi şi ipotenuzele, ceea ce demonstrează concluzia. Mai mult, rezultă chiar că O este tocmai mijlocul segmentului $[P'Q']$.



Soluţia 2:
Fie B', respectiv A' proiecţiile lui O pe catetele AC, respectiv BC, iar $\{A''\} = BC \cap OQ$ şi $\{B''\} = AC \cap OP$. Observăm că $m(\angle BA''Q) = 90^\circ - \frac{1}{2}\, m(\angle B) > 45^\circ = m(\angle BCO)$, deci $A'' \in [BC]$. Deoarece $[BO]$ este bisectoare şi înălţime în triunghiul $A''BQ$, rezultă că acest triunghi este isoscel. Atunci $[BO]$ este şi mediană, deci $A''O = OQ$. Deoarece QQ', OB' şi BC sunt perpendiculare pe AC, ele sunt paralele, deci $A''CQ'Q$ este trapez (dreptunghic) în care $[OB']$ este linie mijlocie. Atunci dreapta OB' este linia mijlocie a triunghiului $CP'Q'$, deci trece prin mijlocul lui $[P'Q']$. Analog se arată că şi OA' trece prin mijlocul lui $[P'Q']$. Ori, cum cele două drepte se intersectează în O, rezultă că O este chiar mijlocul segmentului $[P'Q']$.

Soluţia 3: (dată de *Majoros Csilla*, în cadrul concursului KöMaL)
Considerăm simetricele punctelor A, B, C faţă de O. Triunghiul $A'B'C'$ astfel obţinut îl are tot pe O drept centru al cercului înscris, iar cercul înscris coincide cu cercul înscris în triunghiul ABC (deoarece simetricul faţă de O al unui punct de pe acest cerc este tot pe cerc). Fie E, F, G, H, M şi N punctele de intersecţie dintre laturile triunghiului ABC şi cele ale triunghiului $A'B'C'$ ca în figura de mai jos.



Punctul G este simetricul lui E faţă de O deoarece E este intersecţia dreptelor AB şi $A'C'$, iar G este intersecţia dintre simetricele acestor drepte faţă de O. Analog, F şi H sunt simetrice faţă de O şi M, N sunt simetrice fată de O. Atunci $AEA'G$ şi $BFB'H$ sunt paralelograme şi totodată patrulatere circumscriptibile, deci sunt romburi. Rezultă că diagonalele lor sunt perpendiculare, deci $AA' \perp EG$, de unde $m(\angle EOA) = 90°$, adică punctul E coincide cu punctul P din enunţ. Analog, $BB' \perp FH$, de unde $m(\angle FOB) = 90°$, deci F coincide cu Q.
Patrulaterul $CMC'N$ este dreptunghi şi totodată patrulater circumscriptibil, deci pătrat, adică proiecţiile punctelor P şi Q pe catetele triunghiului ABC sunt: $P' = M$ şi $Q' = N$. Acestea sunt simetrice faţă de O, deci P', O şi Q' nu numai că sunt coliniare, dar O este chiar mijlocul segmentului $[P'Q']$.

Soluţia 4 (dată de *Ana-Iulia Ciupală*)
Dacă notăm cu $B = m(\angle ABC)$, atunci $m(\angle BQO) = 90° - \frac{B}{2}$, iar $m(\angle AQQ') = B$. Atunci $m(\angle OQQ') = 180° - m(\angle BQO) - m(\angle AQQ') = 90° - \frac{B}{2} = m(\angle BQO)$, deci $(QO$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\angle AQQ'$. Deoarece O se află pe bisectoarea interioară a unghiului $\angle Q'AQ$, O este centrul cercului exînscris triunghiului AQQ', deci $(Q'O$ este bisectoare exterioară a unghiului $AQ'Q$, deci bisectoare interioară a unghiului $\angle CQ'Q$. Rezultă că $m(\angle CQ'O) = 45°$. Dar şi $m(\angle OCQ') = 45°$, deci $m(\angle COQ') = 90°$. Analog se arată că $m(\angle P'OC) = 90°$, deci punctele P', O, Q' sunt coliniare.