

Problema 1. Se consideră șirul a_1, a_2, a_3, \dots definit astfel: $a_1 = 6, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 5$ și pentru $n \geq 5, n$ număr natural, a_n se definește ca fiind ultima cifră a sumei celorlalți patru termeni precedenți. Astfel, prin concatenare, șirul devine: 61052850... .

Arătați că secvența 2012 este în șir.

Manuela Prajea

Soluție: Considerăm toate grupurile de patru cifre consecutive disjuncte care apar în șir. Adică: 6105, 2850, 5881, ... și cum sunt 10^4 grupuri de patru cifre posibile, deducem că la un moment dat un grup de patru cifre se va repeta, de exemplu \overline{abcd} . Din regula de definire a șirului deducem că următoarele cifre care vor apărea după grupul \overline{abcd} vor fi unic determinate de aceste patru cifre, deci și acestea se vor repeta, adică dacă după grupul \overline{abcd} va apărea grupul \overline{efgh} , atunci din nou după apariția grupului \overline{abcd} va apărea grupul \overline{efgh} , etc și șirul devenind astfel, de la un moment dat, periodic. De fapt, din modul în care este definit șirul, se vede că și termenii care preced un grup \overline{abcd} sunt unic determinați de cifrele a, b, c, d , deci cifrele care preced un grup \overline{abcd} vor fi mereu aceleași pentru fiecare repetare a grupului \overline{abcd} . De aici rezultă că șirul este periodic de la început. Prin urmare grupul 6105 va mai apărea în șir. Ne uităm la a doua apariție a grupului 6105. Aplicând regula de determinare a termenilor șirului, deducem că termenii din stânga grupului 6105 sunt în ordine: 8, apoi 5, apoi 2, apoi 1, apoi 0, apoi 2, etc, deci o secvență din șir este: ...2012586105..., adică secvența 2012 este în șirul dat.

Problema 2. Să se determine numerele naturale n și p pentru care numerele $p, p + 3^n, p + 3^{n+1}, p + 3^{n+2}$ și $p + 3^{n+3}$

sunt simultan prime.

M. S. Pop

Soluție: Dacă $p \geq 3$ atunci p este impar și deci $p + 3^n$, de exemplu, este sigur număr par, mai mare decât 2, așadar nu poate fi număr prim. Rămâne $p = 2$.

Numerele devin

$$2, 2 + 3^n, 2 + 3^{n+1}, 2 + 3^{n+2}, 2 + 3^{n+3}.$$

Dacă $n = 0$ obținem numerele 2, 3, 5, 11, 29 care sunt prime.

Dacă $n = 1$ obținem numerele 2, 5, 11, 29, 83 care sunt prime.

Pentru $n = 2$ numărul $2 + 3^{n+3}$ are ultima cifră 5, este mai mare decât 5, deci nu este prim.

Pentru $n = 3$ numărul $2 + 3^{n+2}$ are ultima cifră 5, este mai mare decât 5, deci nu este prim.

Să observăm că ultima cifră a lui 3^{4k+1} este 3, pentru orice k număr natural.

Atunci, pentru $n = 4k$, numărul 3^{n+1} are ultima cifră 3 și de aici, pentru $k \geq 1$, numărul $2 + 3^{n+1}$ nu e prim.

Pentru $n = 4k + 1$, numărul 3^n are ultima cifră 3 și de aici, pentru $k \geq 1$, $2 + 3^n$ nu e prim.

Pentru $n = 4k + 2$, numărul 3^{n+3} are ultima cifră 3 și de aici $2 + 3^{n+3}$ (având ultima cifră 5 și fiind mai mare decât 5 pentru orice $k \geq 0$) nu e prim.

Pentru $n = 4k + 3$, $k \geq 0$, numărul 3^{n+2} are ultima cifră 3 și de aici $2 + 3^{n+2}$ nu e prim.

În concluzie, toate numerele sunt prime dacă $p = 2$, $n = 0$ sau $p = 2$, $n = 1$.

Problema 3. Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ascuțitunghic ABC . Pe laturile AB și AC se construiesc, în exterior, triunghiurile isoscele ABD și ACE astfel încât $AB = AD$, $AC = AE$, iar unghiurile DAB și CAE să fie suplementare. Demonstrați că $AM = \frac{1}{2} \cdot DE$.

Olimpiadă Leningrad (Sankt Petersburg)

Soluție: Fie N simetricul lui A față de M .

În patrulaterul $ABNC$ diagonalele se înjumătățesc, deci $ABNC$ este paralelogram.

Atunci $BN = AC = AE$, $AB = AD$ și

$$m(\sphericalangle ABN) = 180^\circ - m(\sphericalangle BAC).$$

În plus, $m(\sphericalangle DAE) = 360^\circ - m(\sphericalangle BAC) - (m(\sphericalangle DAB) + m(\sphericalangle CAE)) = 360^\circ - m(\sphericalangle BAC) - 180^\circ = m(\sphericalangle ABN)$.

Din cele de mai sus rezultă că $\triangle ABN \equiv \triangle DAE$ (LUL).

Atunci $AN = DE$, de unde $AM = \frac{1}{2} AN = \frac{1}{2} DE$.

Soluție alternativă: (la nivel de clasa a VIII-a, dar primită de la mulți copii; schiță)

Se scrie teorema cosinusului în triunghiurile ABC și ADE și se ține seama de faptul că $AD = AB$, $AE = AC$ și că unghiurile $\sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle DAE$ sunt suplementare. Adunând relațiile obținute, rezultă $DE^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$, de unde, folosind teorema medianei, rezultă $DE^2 = 2(AB^2 + AC^2) - BC^2 = 4AM^2$ și concluzia.

Observație. Condiția ca triunghiul să fie ascuțitunghic este inutilă.

Problema 4. Pentru n număr natural rezolvați, în

mulțimea numerelor întregi, ecuația

$$x^4 + y^4 = 13^n.$$

Manuela Prajea

Soluție: Dacă $n = 0$ ecuația devine

$$x^4 + y^4 = 1$$

cu soluțiile $(\pm 1; 0)$ și $(0; \pm 1)$.

Dacă $n \neq 0$, atunci 13^n este divizibil cu 13.

Orice număr întreg p dă la împărțirea cu 13 unul din resturile 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12. Atunci p^2 dă la împărțirea cu 13 unul din resturile 0,1,3,4,9,10,12, iar p^4 unul din resturile 0,1,3,9. Se observă că singura variantă care poate conduce la

$$x^4 + y^4 = 13^n$$

este cea cu x^4, y^4 divizibile cu 13, adică cea cu x, y divizibili cu 13.

Dacă (x, y) este o soluție a ecuației din enunț cu $n > 0$, atunci $x = 13x_1, y = 13y_1$, unde $x_1^4 + y_1^4 = 13^{n-4}$. Dacă $n - 4 > 0$ găsim că $x_1 = 13x_2, y_1 = 13y_2$ și $x_2^4 + y_2^4 = 13^{n-8}$. Continuăm procedeul până când, după k pași, ajungem la ecuația $x_k^4 + y_k^4 = 13^{n-4k}$, unde $r = n - 4k \in \{0, 1, 2, 3\}$ este restul împărțirii lui n la 4.

Dacă $r \in \{1, 2, 3\}$ (adică n nu este divizibil cu 4) atunci am văzut că $x_k = 13x_{k+1}, y_k = 13y_{k+1}$, deci membrul stâng este divizibil cu 13^4 în vreme ce membrul drept nu este divizibil cu 13^4 . Prin urmare, dacă n nu este divizibil cu 4, ecuația nu are soluții.

Dacă $r = 0$ (adică n este divizibil cu 4) rezultă că $(x_k, y_k) \in \{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$, de unde obținem

$(x, y) \in \{(\pm 13^m, 0), (0, \pm 13^m)\}$, unde $m = \frac{n}{4}$.

În concluzie, dacă n nu este divizibil cu 4 atunci ecuația nu are soluții, iar dacă $n = 4m$, $m \in \mathbb{N}$, atunci ecuația are soluțiile $(\pm 13^m, 0)$ și $(0, \pm 13^m)$.