Problema 1. Determinaţi numerele a, b, $c \geq 0$ care satisfac relaţia

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{a - b + c}.$$

* * *

Soluţie: Ecuaţia se scrie echivalent $\sqrt{a} + \sqrt{c} = \sqrt{b} + \sqrt{a - b + c}$. Cum ambii membri sunt nenegativi, această ecuaţie revine prin ridicare la pătrat la ecuaţia, echivalentă cu cea precedentă, $a + c + 2\sqrt{ac} = b + (a - b + c) + 2\sqrt{b(a - b + c)}$. Această ecuaţie se mai scrie $\sqrt{ac} = \sqrt{b(a - b + c)}$, sau, după o nouă ridicare la pătrat, $ac = ab - b^2 + bc$, adică $(b - a)(b - c) = 0$. Prin urmare trebuie ca $b - a = 0$ sau $c - a = 0$, deci soluţiile ecuaţiei sunt $a = b \geq 0,\ c \geq 0$ şi $a \geq 0,\ b = c \geq 0$.

Problema 2. Se dau 25 de numere naturale, distincte două câte două, mai mici decât 1000, care au proprietatea că produsul oricăror două dintre ele este pătrat perfect. Arătaţi că fiecare din cele 25 de numere este pătrat perfect.

Concurs KöMaL, Ungaria, 2004

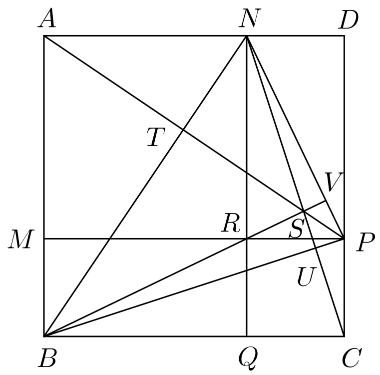
Soluţie:
Presupunând că nu toate numerele ar fi pătrate perfecte, printre ele s-ar găsi unul care, în descompunerea sa în factori primi, conţine (cel puţin) un factor prim la putere impară. Fie a un asemenea număr şi $p_1, p_2, \ldots, p_n$ factorii primi care în descompunerea lui a apar la o putere impară. Deoarece atunci când a este înmulţit cu celelate 24 de numere se obţine mereu un pătrat perfect, rezultă că $p_1, p_2, \ldots, p_n$ apar la putere impară în descompunerea în factori primi a tuturor celorlalte 24 de numere (exceptându-l pe 0 dacă acesta este unul dintre numere). Notând cu d produsul $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, toate numerele trebuie să fie de forma $d \cdot x^2$ cu câte un alt x. Rezultă că cele 25 de numere sunt cel puţin 0, d, $4d, \ldots, 24^2 d$, dar, cum $d \geq 2$, rezultă că cel mai mare dintre numere este cel puţin $2 \cdot 24^2 = 1152 > 1000$, contradicţie.

Observaţie: Afirmaţia din problemă are loc şi pentru 24 de numere deoarece, presupunând contrariul, cel mai mare dintre ele ar fi cel puţin $2 \cdot 23^2 = 1058 > 1000$, contradicţie.

Problema 3. Pe laturile AB şi respectiv AD ale pătratului $ABCD$ se consideră punctele M şi N astfel încât $AM = AN$. Paralela prin M la AD intersectează latura CD în punctul P, iar paralela prin N la AB intersectează latura BC în punctul Q. Dacă notăm cu R punctul de intersecţie a dreptelor MP şi NQ, iar cu S punctul de intersecţie a dreptelor AP şi NC, arătaţi că punctele B, R şi S sunt coliniare.

* * *

Soluţia 1:



Fie $\{T\} = AP \cap BN$ şi $\{U\} = BP \cap CN$.
Deoarece $\Delta\, ABN \equiv \Delta\, DAP$ (C.C.), rezultă că $m(\angle ANB) = m(\angle DPA) = 90^\circ - m(\angle DAP)$, de unde $AP \perp BN$. Analog, din congruenţa triunghiurilor $\Delta\, BCP$ şi $\Delta\, CDN$ rezultă că $BP \perp CN$. Atunci în triunghiul $\Delta\, BNP$ PT şi NU sunt înălţimi, deci S este ortocentrul triunghiului BNP, de unde $BS \perp NP$.
În continuare vom arăta că şi $BR \perp NP$. Va rezulta atunci că punctele S şi R sunt pe perpendiculara dusă din B pe NP, deci că punctele B, R, S sunt coliniare.
Ducem $RV \perp NP$, $V \in NP$. Din congruenţa triunghiurilor $\Delta\, BMR$ şi $\Delta\, PRN$ (C.C.) rezultă că $m(\angle NRV) = 90^\circ - m(\angle RNP) = 90^\circ - m(\angle BRM)$ şi, cum $m(\angle MRN) = 90^\circ$, rezultă că unghiul BRV este alungit, adică B, R, V sunt coliniare, deci $BR \perp NP$, de unde, aşa cum am văzut, rezultă concluzia.

Soluţia 2. (de fapt aceeaşi cu cea de mai sus dar în alţi termeni)[1]
În figură se văd trei perechi de dreptunghiuri congruente care se obţin unele din altele printr-o rotaţie de 90°: $MPDA$ şi $QNAB$, $BCPM$ şi $CDNQ$, precum şi $PDNR$ şi $BQRM$. Din acest motiv diagonalele omoloage sunt perpendiculare, adică $PA \perp BN$, $BP \perp CN$ şi $BR \perp NP$. Rezultă că S este ortocentrul triunghiului BNP, deci aparţine înălţimii BR, adică punctele B, R, S sunt coliniare.

Problema 4. Aflaţi numerele naturale distincte a, b, c, d care satisfac $ab = cd = a + b + c + d - 3$.

* * *

Soluţia 1:
Să observăm mai întâi că numerele sunt nenule. Dacă, de exemplu, $a = 0$, atunci $cd = ab = 0$ implică $c = 0$ sau $d = 0$, ceea ce contrazice faptul că numerele sunt distincte.
Presupunem deocamdată că d este cel mai mare dintre numerele a, b, c, d. Atunci $cd = a + b + c + d - 3 < 4d - 3 < 4d$, deci $c < 4$.
• Dacă $c = 1$ atunci $d = a + b + 1 + d - 3$ implică $a + b = 2$, deci fie $a = b = 1$ (nu

[1] Problema a fost dată în decembrie 2008 la concursul prin corespondenţă al revistei KöMaL (Ungaria). Această soluţie este soluţia oficială dată acolo.

convine), fie $a = 0$ sau $b = 0$ ceea ce, am văzut, nu convine.
• Dacă $c = 2$, obţinem $ab = 2d = a + b + 2 + d - 3$, deci $d = a + b - 1$ şi $2d = ab$, de unde $ab = 2(a + b - 1)$, care se mai scrie succesiv:
$ab - 2a - 2b + 2 = 0 \Leftrightarrow ab - 2a - 2b + 4 = 2 \Leftrightarrow a(b - 2) - 2(b - 2) = 0 \Leftrightarrow (a - 2)(b - 2) = 2$, cu soluţiile $(a, b) \in \{(0, 1), (1, 0), (3, 4), (4, 3)\}$. Am văzut că $a = 0$ sau $b = 0$ nu convin, iar pentru celelalte două soluţii rezultă $d = 6$.
Am obţinut aşadar soluţiile $(3, 4, 2, 6)$ şi $(4, 3, 2, 6)$.
• Dacă $c = 3$, condiţia $cd = a + b + c + d - 3$ devine $2d = a + b$. Cum însă $d > a$ şi $d > b$, această condiţie nu poate fi îndeplinită.

Renunţând la condiţia ca d să fie cel mai mare dintre numerele a, b, c, d, obţinem în final soluţiile: $(3, 4, 2, 6)$, $(4, 3, 2, 6)$, $(3, 4, 6, 2)$, $(4, 3, 6, 2)$, $(2, 6, 3, 4)$, $(2, 6, 4, 3)$, $(6, 2, 3, 4)$, $(6, 2, 4, 3)$.

Observaţie: Ecuaţia $ab - 2a - 2b + 2 = 0$ la care s-a ajuns în cazul $c = 2$ putea fi rezolvată şi astfel:
$a(b-2) = 2b-2$ implică mai întâi $b \neq 2$, apoi $a = \dfrac{2b - 2}{b - 2} \in \mathbb{N}^*$, adică $b-2 \mid 2b-2$.
Cum $b - 2 \mid 2(b - 2)$, adică $b - 2 \mid 2b - 4$, rezultă că $b - 2$ divide şi diferenţa $(2b-2) - (2b-4) = 2$, deci $b-2 \in \{-2, -1, 1, 2\}$, adică $b \in \{0, 1, 3, 4\}$. Însă $b = 0$ nu convine iar $b = 1$ conduce la $a = 0$ care nu convine, aşadar $b = 3$ (şi $a = 4$) sau $b = 4$ (şi $a = 3$).

Soluţia 2: (dată de Adrian Badea)
Fie a, b, c, d numere naturale disticte care satisfac ecuaţia din enunţ.
Dacă $a = 0$, atunci $cd = 0$, deci $c = 0$ sau $d = 0$, fals. Analog $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$ contrazic faptul că numerele sunt distincte.

Dacă $a = 1$, $b = cd = 1 + b + c + d - 3$, deci $c + d = 2$, de unde, cum numerele sunt nenule, $c = d = 1$, fals. Analog rezultă că $b \neq 1$, $c \neq 1$, $d \neq 1$.

Dacă $a, b, c, d \geq 2$, avem $ab = a + b + c + d - 3$ şi $cd = a + b + c + d - 3$. Adunând cele două relaţii obţinem $ab + cd = 2a + 2b + 2c + 2d - 6$, adică $ab - 2a - 2b + 4 + cd - 2c - 2d + 4 = 2$, sau $a(b - 2) - 2(b - 2) + c(d - 2) - 2(d - 2) = 2$, deci $(a - 2)(b - 2) + (c - 2)(d - 2) = 2$.

Distingem cazurile: a) Dacă $a = 2$ (cazurile $b = 2$, $c = 2$, şi $d = 2$ sunt analoage) atunci $(c-2)(d-2) = 2$, de unde avem fie $c-2 = 1$ şi $d-2 = 2$, deci $c = 3$, $d = 4$, $ab = 12$, de unde $b = 6$, deci soluţia $(2, 6, 3, 4)$, fie $d - 2 = 1$ şi $c - 2 = 2$, deci $d = 3$, $c = 4$, $ab = 12$, deci $b = 6$ deci soluţia (2,6,4,3). În cazurile analoage se obţin soluţiile: dacă $b = 2$: (6,2,3,4) şi (6,2,4,3), dacă $c = 2$: (3,4,2,6) şi (4,3,2,6), iar dacă $d = 2$: (3,4,6,2) şi (4,3,6,2).

b) Dacă $a, b, c, d \geq 3$, atunci $a - 2 \geq 1$,$b - 2 \geq 1$, $c - 2 \geq 1$, $d - 2 \geq 1$, deci $(a-2)(b-2) \geq 1$ şi $(c-2)(d-2) \geq 1$, de unde, prin adunare, $(a-2)(b-2) + (c-2)(d-2) \geq 2$. Dar avem $(a-2)(b-2) + (c-2)(d-2) = 2$, deci $(a-2)(b-2) = 1$, de unde $a - 2 = b - 2 = 1$, adică $a = b = 3$, fals.
Aşadar în cazul al doilea nu avem soluţii.