Problema 1. Determinaţi numerele reale x care verifică relaţia $[x] = \{2x\} + \{4x\}$.

* * *

Soluţia 1:
Deoarece $0 \leq \{2x\} < 1$ şi $0 \leq \{4x\} < 1$, rezultă că $0 \leq [x] < 2$, deci $[x]$ poate fi 0 sau 1.

• Dacă $[x] = 0$ atunci trebuie ca $x \in [0, 1)$ şi totodată $\{2x\} = \{4x\} = 0$, adică $2x$ şi $4x$ trebuie să fie întregi. Convin $x = 0$ şi $x = \dfrac{1}{2}$.

• Dacă $[x] = 1$, avem pe de-o parte că $x \in [1, 2)$, pe de altă parte că $\{2x\}+\{4x\}=1$. Această din urmă condiţie revine la $2x + 4x \in \mathbb{Z}$, $2x \notin \mathbb{Z}$, $4x \notin \mathbb{Z}$ (a se vedea şi problema 2 din paragraful ,,Probleme instructive" din materialul teoretic). Trebuie aşadar ca $6x \in \mathbb{Z}$ dar $2x$, $4x \notin \mathbb{Z}$. Convin valorile $x \in \left\{\dfrac{7}{6}, \dfrac{8}{6}, \dfrac{10}{6}, \dfrac{11}{6}\right\}$.

În concluzie, soluţiile ecuaţiei sunt $0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{6}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{11}{6}$.

Soluţia 2:
Avem $[x] = 2x - [2x] + 4x - [4x]$, adică $6x = [x] + [2x] + [4x] \in \mathbb{Z}$, deci $6x \in \mathbb{Z}$. Fie $x = \dfrac{n}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia revine la $n = \left[\dfrac{n}{6}\right] + \left[\dfrac{n}{3}\right] + \left[\dfrac{2n}{3}\right]$.

În funcţie de restul împărţirii lui n la 6 distingem 6 cazuri:

1. $n = 6k$; ecuaţia devine $6k = k + 2k + 4k$, de unde $k = 0$, deci $n = 0$, adică $x = 0$;
2. $n = 6k + 1$; ecuaţia devine $6k + 1 = k + 2k + 4k$, de unde $k = 1$, deci $n = 7$, adică $x = \dfrac{7}{6}$;
3. $n = 6k + 2$; ecuaţia devine $6k + 2 = k + 2k + (4k + 1)$, de unde $k = 1$, deci $n = 8$, adică $x = \dfrac{4}{3}$;
4. $n = 6k + 3$; ecuaţia devine $6k + 3 = k + (2k + 1) + (4k + 2)$, de unde $k = 0$, deci $n = 3$, adică $x = \dfrac{1}{2}$;
5. $n = 6k + 4$; ecuaţia devine $6k + 4 = k + (2k + 1) + (4k + 2)$, de unde $k = 1$, deci $n = 10$, adică $x = \dfrac{5}{3}$;
6. $n = 6k + 5$; ecuaţia devine $6k + 5 = k + (2k + 1) + (4k + 3)$, de unde $k = 1$, deci $n = 11$, adică $x = \dfrac{11}{6}$.

În concluzie, soluţiile ecuaţiei sunt $0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{6}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{11}{6}$.

Problema 2. Dacă notăm cu $d(x)$ numărul divizorilor naturali ai unui număr natural x, demonstraţi că, pentru orice număr natural nenul n, are loc egalitatea

$$d(n) \cdot d(6n) = d(2n) \cdot d(3n).$$

* * *

Soluţie:
Dacă $n = 2^a \cdot 3^b \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$, cu $m \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2, \ldots, p_m > 3$ numere prime, $a, b \in \mathbb{N}$ şi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N}^*$, atunci avem:
$d(n) = (a+1)(b+1)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_m+1)$,
$d(2n) = (a+2)(b+1)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_m+1)$,
$d(3n) = (a+1)(b+2)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_m+1)$ şi
$d(6n) = (a+2)(b+2)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_m+1)$, deci
$d(n) \cdot d(6n) = (a+1)(b+1)(a+2)(b+2)[(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_m+1)]^2 = d(2n) \cdot d(3n)$.

Problema 3. Pe un cerc se scriu 2013 numere naturale nenule distincte. Este posibil ca, în fiecare pereche de numere vecine pe cerc, dacă împărţim numărul mai mare la numărul mai mic să obţinem mereu un număr prim?

* * *

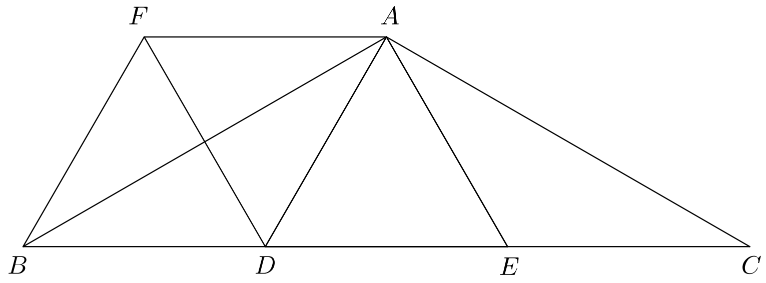
Soluţie:
Vom arăta că răspunsul la întrebarea din enunţ este ,,nu”. Presupunem, prin absurd, că ar fi posibil, pentru anumite 2013 numere naturale distincte, ca în orice pereche de numere vecine, numărul mai mare să dea la împărţirea la numărul mai mic un număr prim.
Dacă reprezentăm numerele de pe cerc sub forma $1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ cu $k \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ numere prime nu neapărat distincte două câte două, faptul că numărul mai mare împărţit la numărul mai mic dă un număr prim arată că numărul mai mare are exact un factor prim în plus faţă de numărul mai mic. Prin urmare paritatea numărului total de factori primi, k, ar trebui să fie diferită la oricare două numere vecine, deci această paritate ar trebui să alterneze. Cum însă pe cerc există un număr impar de numere, acest lucru nu este posibil. Am ajuns astfel la o contradicţie.

Problema 4. Fie triunghiul ABC cu $AB = AC$. Pe latura (BC) se consideră punctele D şi E astfel încât $BD = DE = EC$. Ştiind că măsura unghiului $\angle DAE$ este jumătate din măsura unghiului $\angle BAC$, aflaţi măsura unghiului $\angle BAC$.

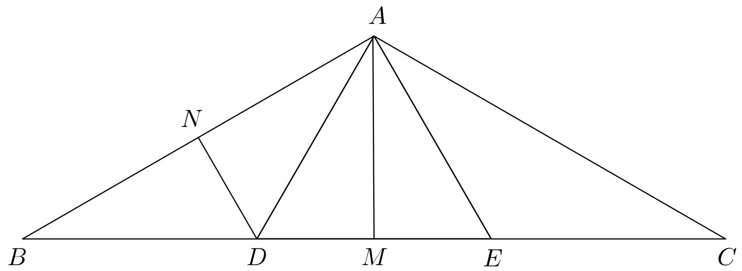
Leonard Giugiuc

Soluţia 1:
Să observăm mai întâi că triunghiul ABC, fiind isoscel, are unghiurile de la bază congruente, apoi că triunghiurile ABD şi ACE sunt congruente (LUL).
Deducem că $m(\angle BAD) = m(\angle CAE) = \dfrac{m(\angle BAC)}{4} = \dfrac{m(\angle DAE)}{2}$.
Fie F simetricul lui D faţă de AB. Avem atunci că $AF = AD = AE$ şi $m(\angle FAB) =$

$m(\angle DAB)$, deci $m(\angle FAD) = 2m(\angle BAD) = m(\angle DAE)$. Triunghiurile FAD şi DAE sunt congruente (LUL), de unde $DF = DE = BD = BF$, deci triunghiul BDF este echilateral. Rezultă de aici că $m(\angle ABD) = 30°$, deci $m(\angle BAC) = 120°$.



Soluţia 2:
Ca în soluţia de mai sus se arată că $m(\angle BAD) = m(\angle CAE) = \dfrac{m(\angle BAC)}{4} = \dfrac{m(\angle DAE)}{2}$. Fie M mijlocul lui $[DE]$, iar N proiecţia lui D pe AB. Atunci triunghiurile dreptunghice AND şi AMD sunt congruente (IU), deci $DN = DM = \dfrac{DE}{2} = \dfrac{BD}{2}$. În triunghiul dreptunghic BDN, cateta DN are lungimea jumătate din lungimea ipotenuzei BD, deci $m(\angle NBD) = 30°$, prin urmare, $m(\angle BAC) = 120°$.



Soluţia 3: (pentru cine ştie deja teorema bisectoarei)
Ca în soluţia 1 se arată că $m(\angle BAD) = m(\angle CAE) = \dfrac{m(\angle BAC)}{4} = \dfrac{m(\angle DAE)}{2}$ şi că $\Delta BAD \equiv \Delta CAE$. Rezultă că $AD = AE$. Fie M mijlocul lui $[DE]$.
Triunghiul DAE fiind isoscel, mediana AM este înălţime şi bisectoare, deci unghiurile BAD, DAM, MAE, EAC sunt congruente, adică $(AD, (AE$ sunt bisectoarele unghiurilor $\angle BAM$, respectiv $\angle CAM$. Din teorema bisectoarei rezultă că $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{DM}{DB} = \dfrac{1}{2}$ (deoarece $DM = \dfrac{1}{2}DE = \dfrac{1}{2}BD$). Rezultă că în triunghiul dreptunghic BAM cateta AM este jumătate din ipotenuza AB, deci $m(\angle ABM) = 30°$,

de unde $m(\angle BAC) = 120°$.

Soluţia 4: (*Alexandra Hirsch, Alex Claudiu Deac*)
Fie F proiecţia lui A pe BC şi P simetricul lui A faţă de BC. Atunci triunghiul ABP este isoscel cu $BA = BP$, deci $[BF]$ este mediană. Cum D este punctul de pe această mediană care este la două treimi de vârf şi o treime de bază, D este centrul de greutate al acestui triunghi. Pe de altă parte, ca în soluţia 1 se arată că $(AD$ este bisectoarea unghiului BAP, deci triunghiul ABP este echilateral. De aici este imediat că $m(\angle A) = 2m(\angle PAB) = 120°$.