Problema 1. Să se determine numerele naturale $\overline{abc}$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2$ să fie pătratul unui număr prim de forma $3k + 2,\ k \in \mathbb{N}$.

I. Coroian

Soluţie: Deoarece $a,\ b,\ c$ sunt cifre avem

$$a^2 \leq 81,\ b^2 \leq 81,\ c^2 \leq 81.$$

Cum

$$a^2 + b^2 + c^2 = (3k+2)^2$$

deducem că

$$(3k+2)^2 \leq 243 \qquad (1).$$

Din (1), ţinând cont de faptul că $3k + 2$ este număr prim, obţinem $k \in \{0,\ 1,\ 3\}$ şi atunci $a^2 + b^2 + c^2 \in \{4,\ 25,\ 121\}$.

Analizând toate cazurile obţinem $\overline{abc}$ poate fi: 200, 269, 296, 304, 340, 403, 430, 500, 629, 667, 676, 692, 766, 926, 962.

Problema 2. Fie triunghiul echilateral ABC.

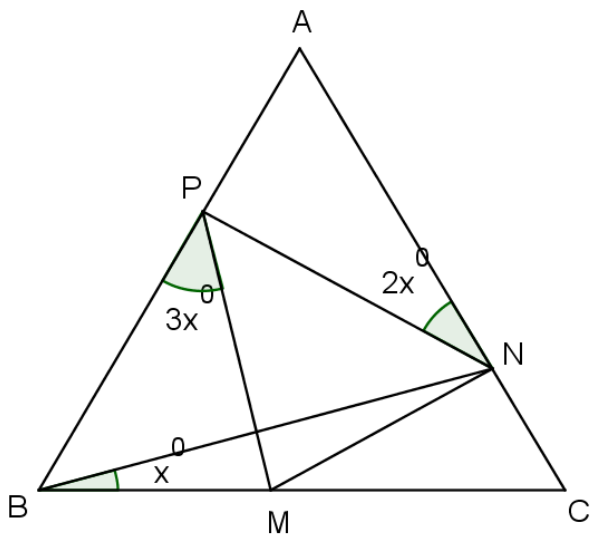
Pe laturile (BC), (CA), (AB) se consideră punctele M, N şi P, asfel încât: $m(\widehat{NBC}) = x^\circ$, $m(\widehat{ANP}) = 2x^\circ$, $m(\widehat{BPM}) = 3x^\circ$.

a) Arătaţi că triunghiul BPN este isoscel.

b) Dacă $x = 15^\circ$, demonstraţi că $MN \perp AC$.

Mircea Fianu, Bucureşti

Soluţie:



a) Unghiul BNA este exterior triunghiului BNC şi atunci

$$m(\widehat{BNA}) = 60^\circ + x^\circ.$$

Cum

$$m(\widehat{PNB}) = m(\widehat{BNA}) - m(\widehat{PNA})$$

deducem că

$$m(\widehat{PNB}) = 60^\circ - x^\circ \qquad (1).$$

Pe de altă parte,

$$m(\widehat{PBN}) = m(\widehat{PBC}) - m(\widehat{NBC})$$

adică

$$m(\widehat{PBN}) = 60^\circ - x^\circ \qquad (2).$$

Din (1) şi (2) deducem că triunghiul BNP este isoscel, cu $[PB] \equiv [PN]$.

b) Dacă $x = 15^\circ$ atunci $m(\widehat{PNB}) = m(\widehat{PBN}) = 45^\circ$ şi $m(\widehat{BPM}) = 45^\circ$.

Din $m(\widehat{BPM}) = 45^\circ$ şi $m(\widehat{PBN}) = 45^\circ$ rezultă $PM \perp BN$ şi cum $m(\widehat{PNB}) = 45^\circ$ obţinem că $m(\widehat{NPM}) = 45^\circ$.

Acum, din $[PB] \equiv [PN]$; $[PM]$ latură comună şi $\widehat{BPM} \equiv \widehat{NPM}$ $(= 45^\circ)$ deducem că $\triangle PBM \equiv \triangle PNM$, de unde $m(\widehat{PNM}) = 60^\circ$ (3).

Din (3), folosind faptul că $m(\widehat{PNA}) = 30^\circ$, obţinem că $m(\widehat{ANM}) = 90^\circ$, adică $MN \perp AC$.

Problema 3. Să se determine numerele naturale a, b, c, mai mari decât 1 pentru care $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ este număr natural.

* * *

Soluţie: Relaţia $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ fiind simetrică în a, b, c putem presupune $a \leq b \leq c$.

Cum $c \geq b \geq a \geq 2$, avem

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{3}{2},$$

deci $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$.

Dacă $a \geq 4$ atunci $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \leq \dfrac{3}{4} < 1$, deci acest caz nu este posibil. Rezultă că $a \in \{2, 3\}$.

Dacă $a = 2$ trebuie ca $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2}$. Dacă $b \geq 5$ atunci $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \leq \dfrac{2}{5} < \dfrac{1}{2}$. Rezultă atunci că $b \in \{3, 4\}$.

Pentru $b = 3$ rezultă $c = 6$, iar dacă $b = 4$ rezultă $a = 4$.

Dacă $a = 3$ trebuie ca $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{3}$. Dacă $b \geq 4$ atunci $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \leq \dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{3}$. Rezultă atunci că $b = 3$.
Pentru $b = 3$ rezultă $c = 3$.

În concluzie, renunţând la condiţia $a \leq b \leq c$, obţinem că (a, b, c) poate fi (3,3,3); (2,4,4); (4,2,4); (4,4,2); (2,3,6); (2,6,3); (3,2,6); (3,6,2); (6,2,3); (6,3,2).

Problema 4. Numărul prim p are următoarea proprietate: restul r, al împărţirii lui p la 210 este un număr compus şi poate fi reprezentat ca sumă de două pătrate perfecte.

Să se determine numărul r.

Olimpiada Naţională, Republica Moldova

Soluţie: Din enunţ avem

$$p = 210k + r, \qquad r < 210$$

sau

$$p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot k + r$$

Deoarece p este număr prim rezultă că r nu poate avea în descompunerea sa în factori nici pe 2, nici pe 3, nici pe 5, nici pe 7. În caz contrar, ar rezulta că p este unul din aceste numere, caz 'in care am obţine $k = 0$ şi $p = r$ ceea ce nu se poate deoarece p este număr prim, iar r număr compus.

Atunci $r \in \{11^2;\ 11 \cdot 13;\ 11 \cdot 17;\ 11 \cdot 19;\ 13^2\}$.

Prin calcul se constată că numai $r = 13^2 = 12^2 + 5^2$ se scrie ca suma a două pătrate perfecte nenule. Deoarece în unele cărţi este considerat şi 0 ca fiind pătrat perfect, probabil că în enunţ trebuia preciazat că este vorba de pătrate perfecte *nenule.* În caz contrar, şi 11^2 se scrie ca $0^2 + 11^2$, deci se găsesc două numere, 121 şi 169, care ar putea eventual îndeplini condiţiile din enunţ. Mai rămâne să arătăm că există numere prime care împărţite la 210 chiar dau aceste resturi. Alegând $k = 1$, găsim numerele $p = 331$ şi $p = 379$ care sunt prime şi dau la împărţirea cu 210 chiar resturile dorite, anume 121 şi respectiv 169.

În concluzie $r \in \{121, 169\}$.