Problema 1. Determinaţi numerele întregi a şi b pentru care $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{ab}=4.$

Adriana şi Lucian Dragomir, Revista RMCS, nr. 26 (2008)

Soluţie: Fie a şi b numere întregi care verifică relaţia din enunţ. Evident a şi b trebuie să fie nenule. Eliminând numitorii, se ajunge la $(4b-2)a=b+3$. Deoarece $4b-2\neq 0$ pentru $b\in\mathbb{Z}$, rezultă că $a=\frac{b+3}{4b-2}$, deci este necesar ca $4b-2$ să dividă $b+3$. Atunci $4b-2$ divide $4b+12$ şi $4b-2$, deci şi pe 14. Aşadar $4b-2\in\{-14, -2, 2, 14\}$ (am enumerat divizorii lui 14 care dau rest 2 la împărţirea cu 4). Găsim că $b\in\{-3, 0, 1, 4\}$.
Dacă $b=-3$ rezultă $a=0$ ceea ce nu convine.
Cazul $b=0$ nu convine.
Pentru $b=1$ rezultă $a=2$, numere despre care se verifică imediat că satisfac relaţia dată.
Pentru $b=4$ găsim $a=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$ care nu convine.
Aşadar singurele numere care verifică relaţia dată sunt $a=2$, $b=1$.

Problema 2. Un număr de cinci cifre A se scrie numai cu cifre din mulţimea $\{2,3\}$, iar numărul de patru cifre B se scrie numai cu cifre din mulţimea $\{3,4\}$. Este posibil ca produsul $A\cdot B$ să se scrie numai cu cifra 2?

* * *

Soluţia 1:
Avem că $22222\leq A\leq 33333$ şi $3333\leq B\leq 4444$ deci $22222\cdot 3333\leq A\cdot B\leq 33333\cdot 4444$ adică $74065926\leq A\cdot B\leq 148131852$. Aşadar $A\cdot B$ are 8 sau 9 cifre dar e mai mare decât 22222222 şi mai mic decât 222222222 deci nu poate avea toate cifrele egale cu 2.

Soluţia 2:
Presupunem că ar există A şi B cu proprietatea dorită şi considerăm două asemenea numere. Analizând ultima cifră a numerelor A şi B constatăm că trebuie ca A să aibă ultima cifră 3, iar B ultima cifră 4. Examinând acum cifra zecilor, pentru ca cifra zecilor produsului $A\cdot B$ să fie 2 trebuie ca A şi B să aibă, ambele, cifra zecilor 3. Examinând acum cifra sutelor, pentru ca cifra sutelor produsului $A\cdot B$ să fie 2 trebuie ca A şi B să aibă, ambele, cifra sutelor 3. Examinând acum cifra miilor, pentru ca cifra miilor produsului $A\cdot B$ să fie 2 trebuie ca A şi B să aibă, ambele, cifra miilor 3, deci $B=3334$. Verificăm acum imediat că nici $23333\cdot 3334$, nici $33333\cdot 3334$ nu se scriu numai cu cifre 2, deci presupunerea făcută este falsă, adică nu există numere cu proprietatea din enunţ.

Problema 3. Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care egalitatea

$$\{x\} + \left\{x + \frac{1}{n}\right\} = \{nx\} + \frac{1}{n}$$

este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Lucian Dragomir

Soluţie:
Pentru că egalitatea trebuie să aibă loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ea trebuie să aibă loc, printre altele, pentru $x = \dfrac{1}{n}$. Rezultă că

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} + \left\{\frac{2}{n}\right\} = 0 + \frac{1}{n}.$$

Dacă $n \geq 3$ această relaţie revine la $0 = \dfrac{1}{n}$, fals. Aşadar pentru $n \geq 3$ egalitatea din enunţ nu are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Rămân de tratat cazurile $n = 1$ şi $n = 2$.

• Pentru $n = 1$ egalitatea din enunţ devine $\{x\}+\{x+1\} = \{x\}+1$, adică $\{x+1\} = 1$ care nu este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$ (este chiar falsă pentru orice $x \in \mathbb{R}$).

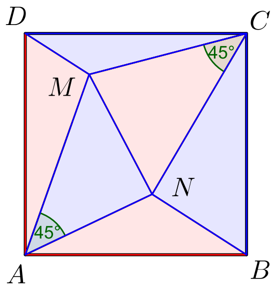
• Pentru $n = 2$ egalitatea din enunţ revine la $\{x\} + \left\{x + \dfrac{1}{2}\right\} = \{2x\} + \dfrac{1}{2}$, adică la $x - [x] + x + \dfrac{1}{2} - \left[x + \dfrac{1}{2}\right] = 2x - [2x] + \dfrac{1}{2}$, deci la $[2x] = [x] + \left[x + \dfrac{1}{2}\right]$, care este identitatea lui Hermite[1,2] şi este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

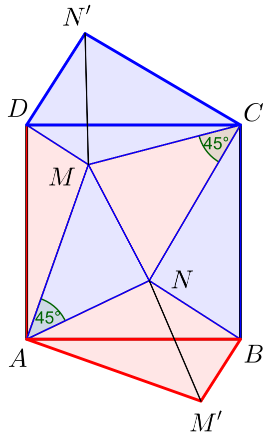
În concluzie, singurul număr natural nenul pentru care egalitatea din enunţ are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este $n = 2$.

Problema 4. În interiorul pătratului $ABCD$ se consideră două puncte, M şi N, astfel încât $m(\angle MAN) = m(\angle MCN) = 45°$, $M \in Int(\angle NAD)$. Suprafeţele triunghiurilor MAD, MCN şi NAB se colorează cu roşu, iar suprafeţele triunghiurilor MCD, MAN şi NCB se colorează cu albastru.
Arătaţi că suprafaţa colorată cu roşu şi suprafaţa colorată cu albsatru au aceeaşi arie.

Revista Kvant, 2002

[1] vezi materialul teoretic de la etapa a doua
[2] Charles Hermite (1822-1901), matematician francez, ro.wikipedia.org/wiki/Charles_Hermite





Construim, ca în figura de mai sus (cea din dreapta), în exteriorul pătratului, triunghiurile $\Delta DCN' \equiv \Delta BCN$ şi $\Delta ABM' \equiv \Delta ADM$, cu alte cuvinte ,,rotim" triunghiurile CNB şi AMD cu $90°$ în sensul acelor de ceasornic, în jurul punctului C, respectiv în jurul punctului A.

Atunci $m(\angle MCN') = m(\angle MCD) + m(\angle DCN') = m(\angle MCD) + m(\angle BCN) = 90° - m(\angle MCN) = 45°$ şi, analog, $m(\angle NAM') = m(\angle NAM) = 45°$. Cum $CN' = CN$ şi $AM' = AM$ (din construcţie), rezultă că $\Delta MCN' \equiv \Delta MCN$ şi $\Delta NAM' \equiv \Delta NAM$ (L.U.L.). De aici rezultă că $MN' = MN = M'N$, deci şi $\Delta MDN' \equiv \Delta M'BN$ (L.L.L.).

În concluzie, avem că aria suprafeţei albastre (din interiorul pătratului) este

$$\mathcal{A}_{\Delta BCN} + \mathcal{A}_{\Delta CDM} + \mathcal{A}_{\Delta MAN} = \mathcal{A}_{\Delta DCN'} + \mathcal{A}_{\Delta CDM} + \mathcal{A}_{\Delta MAN} =$$

$$\mathcal{A}_{\Delta MCN'} + \mathcal{A}_{\Delta MDN'} + \mathcal{A}_{\Delta MAN} = \mathcal{A}_{\Delta MCN} + \mathcal{A}_{\Delta M'BN} + \mathcal{A}_{\Delta M'AN} =$$

$$\mathcal{A}_{\Delta MCN} + \mathcal{A}_{\Delta ANB} + \mathcal{A}_{\Delta AM'B} = \mathcal{A}_{\Delta MCN} + \mathcal{A}_{\Delta ANB} + \mathcal{A}_{\Delta AMD},$$

adică egală cu aria suprafeţei roşii din interiorul pătratului.