Problema 1. Arătaţi că:

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2\cdot 4}+\frac{5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+\frac{2013}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2014}<1$,

b) $\frac{1}{2}+\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 4}+\frac{4}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+\frac{2012}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2013}+\frac{2013}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2014}<2.$

* * *

Soluţie:

a) Putem scrie că $S_1 \stackrel{\text{not.}}{=} \frac{1}{2}+\frac{3}{2\cdot 4}+\frac{5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+\frac{2013}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2014}=$

$$\frac{2-1}{2}+\frac{4-1}{2\cdot 4}+\frac{6-1}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+\frac{2014-1}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2014}=$$

$$\frac{2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{4}{2\cdot 4}-\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{6}{2\cdot 4\cdot 6}-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+\frac{2014}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2012\cdot 2014}-\frac{1}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2014}=$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 4}-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2012}-\frac{1}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2014}.$$

Observăm că fiecare fracţie negativă, cu excepţia ultimeia, este urmată în sumă de opusul ei. Aceşti termeni se reduc aşadar, iar suma rămasă este

$S_1=1-\frac{1}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2014}$ care este evident mai mică decât 1.

b) Separăm termenii sumei în două grupe: cei cu numitorul par şi respectiv cei cu numitorul impar. Suma fracţiilor cu numitorul par este tocmai suma S_1 calculată mai sus, despre care am arătat că este mai mică decât 1. Vom arăta că şi suma termenilor cu numitorul impar este mai mică decât 1. Avem:

$S_2 \stackrel{\text{not.}}{=} \frac{2}{1\cdot 3}+\frac{4}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots+\frac{2012}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2013}=\frac{3-1}{1\cdot 3}+\frac{5-1}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots+\frac{2013-1}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2013}=$

$$\frac{3}{1\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{5}{1\cdot 3\cdot 5}-\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots+\frac{2013}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2011\cdot 2013}-\frac{1}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2013}=$$

$$1-\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2011}-\frac{1}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2013}.$$

Ca şi la suma S_1, fiecare fracţie negativă, cu excepţia ultimeia, este urmată în sumă de opusul ei, prin urmare $S_2=1-\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 2013}$, care este evident mai mică decât 1.

Prin urmare, suma căutată, S_1+S_2, este mai mică decât 2.

Problema 2. În fiecare pătrăţel al unei table 10×10 este scris câte un număr real. Emilia a calculat toate produsele de două numere scrise în pătrăţele diferite ale tablei şi a constatat că exact 1000 dintre aceste produse erau negative. De câte ori apărea numărul 0 printre numerele cu care era completată tabla? Găsiţi toate răspunsurile posibile.

Concursul Náboj, Cehia şi Slovacia, 2011

Soluţie:
Dacă notăm cu p, n numărul de numere pozitive, respectiv negative din pătrăţelele tablei, avem că $0 \leq p \leq 100$ şi $0 \leq n \leq 100$ (sunt $10 \times 10 = 100$ de numere în tabel). De asemenea trebuie ca $n + p \leq 100$, diferenţa $100 - n - p$ reprezentând numărul, căutat, de numere egale cu 0 aflate în tabel. Produse negative se obţin numai înmulţind un număr pozitiv cu unul negativ, aşadar avem $n \cdot p = 1000$. Analizând posibilităţile, găsim variantele $\{n, p\} = \{10, 100\}$, $\{n, p\} = \{20, 50\}$ şi $\{n, p\} = \{25, 40\}$. Prima variantă nu respectă $n + p \leq 100$. Rămân celelalte două, pentru care numărul de zerouri este $100 - 20 - 50 = 30$, respectiv $100 - 25 - 40 = 35$. Se verifică uşor că ambele variante sunt într-adevăr posibile.
Aşadar numărul de zerouri poate fi 30 sau 35.

Problema 3. Un triunghi ABC din hârtie a fost îndoit după o dreaptă astfel încât vârful C a ajuns pe latura (AB), iar părţile care au rămas neacoperite reprezintă triunghiuri isoscele la care laturile congruente se întâlnesc în A, respectiv B. Determinaţi măsura unghiului $\angle ACB$.

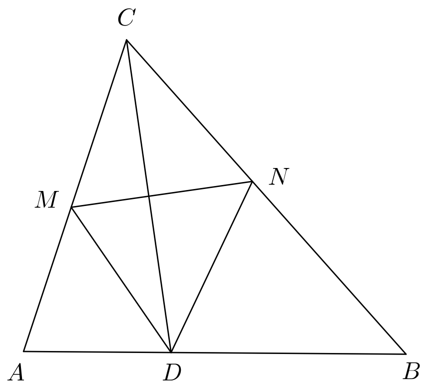
Concurs Rusia

Soluţie:
Considerăm că dreapta după care a fost făcută îndoirea intersectează laturile (AC) şi (BC) în M, respectiv N, iar vârful C ajunge pe (AB) în punctul D. Ştim că $AM = AD$ şi $BN = BD$; de asemenea, $\angle MDN \equiv \angle MCN$.

Din triunghiul isoscel MAD avem $m(\angle MDA) = \dfrac{180^\circ - m(\angle A)}{2}$. Analog se obţine că $m(\angle NDB) = \dfrac{180^\circ - m(\angle B)}{2}$. Considerând unghiurile formate în D, avem

$$\frac{180^\circ - m(\angle A)}{2} + m(\angle C) + \frac{180^\circ - m(\angle B)}{2} = 180^\circ,$$

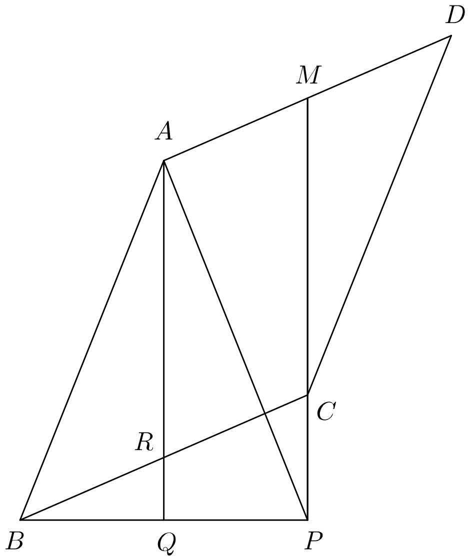
de unde $2m(\angle C) - m(\angle A) - m(\angle B) = 0^\circ$. Cum $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180^\circ$, găsim că $m(\angle C) = 60^\circ$.



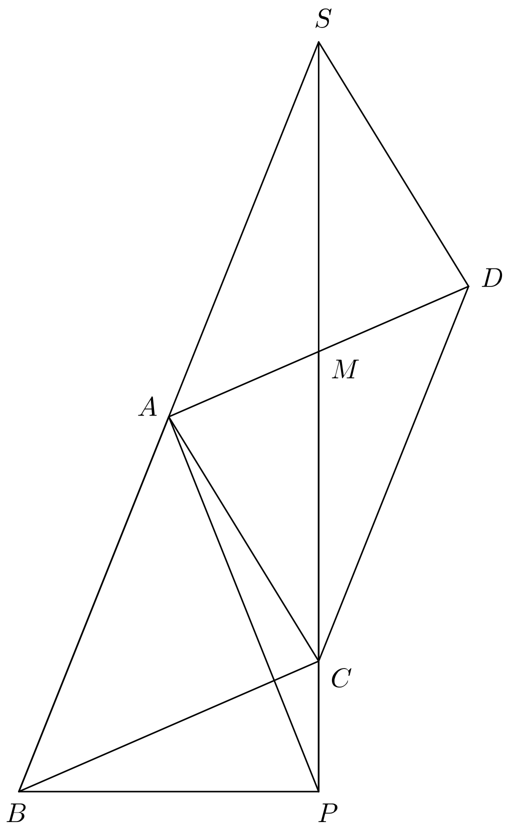
Problema 4. Fie ABP un triunghi isoscel cu $AB = AP$ şi unghiul $\angle PAB$ ascuţit. Pe dreapta perpendiculară pe PB în punctul P se consideră un punct C, situat în acelaşi semiplan determinat de PB ca şi A, dar nesituat pe dreapta AB. Fie D punctul pentru care $ABCD$ este paralelogram, iar M punctul de intersecţie a dreptelor PC şi DA. Arătaţi că M este mijlocul segmentului $[DA]$.

Olimpiadă Marea Britanie, 1998

Soluţia 1: Fie Q mijlocul lui $[BP]$ şi R punctul de intersecţie a dreptelor BC şi AQ. Triunghiul ABP fiind isoscel, AQ este înălţime, deci paralelă cu PC. Atunci $[RQ]$ este linie mijlocie în triunghiul BCP, deci R este mijlocul lui $[BC]$. Deoarece $AR \parallel CM$ şi $RC \parallel AM$, patrulaterul $AMCR$ este paralelogram, deci $AM = RC = \frac{1}{2}\, BC = \frac{1}{2}\, AD$, de unde concluzia.



Soluţia 2: Fie S punctul de intersecţie a dreptelor AB şi PC. Din triunghiul dreptunghic $\angle BPS$, avem $m(\angle BSP) = 90^\circ - m(\angle SBP) = 90^\circ - m(\angle APB) = m(\angle SPA)$, deci triunghiul SPA este isoscel, cu $AS = AP$. Atunci $AS = AP = AB = CD$ şi, cum $AS \parallel CD$, rezultă că $ASDC$ este paralelogram, deci diagonala $[CS]$ înjumătăţeşte diagonala $[AD]$, adică M este mijlocul segmentului $[AD]$.


S
D
M
A
C
B
P