Problema 1. Arătaţi că pentru orice număr natural nenul n are loc inegalitatea

$$\frac{1^2+1-1}{2!}+\frac{2^2+2-1}{3!}+\frac{3^2+3-1}{4!}+\cdots+\frac{n^2+n-1}{(n+1)!}<2,$$

unde, pentru $k \in \mathbb{N}^*$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$.

* * *

Soluţie: Definind $0! = 1$, avem pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

$$\frac{k^2+k-1}{(k+1)!}=\frac{k(k+1)-1}{(k+1)!}=\frac{k(k+1)}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!}=\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{(k+1)!}, \qquad (*)$$

deoarece $(k+1)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (k-1)}_{=(k-1)!} \cdot k \cdot (k+1) = (k-1)! \cdot k(k+1)$.

Folosind relaţia $(*)$ pentru fiecare $k = 1, 2, \ldots n$, obţinem că

$$\frac{1^2+1-1}{2!}+\frac{2^2+2-1}{3!}+\frac{3^2+3-1}{4!}+\cdots+\frac{n^2+n-1}{(n+1)!}=$$

$$=\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}\right)+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}\right)+\cdots+$$

$$=\left(\frac{1}{(n-4)!}-\frac{1}{(n-2)!}\right)+\left(\frac{1}{(n-3)!}-\frac{1}{(n-1)!}\right)+\left(\frac{1}{(n-2)!}-\frac{1}{n!}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}-\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=2-\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}<2.$$

Problema 2. Demonstraţi că printre oricare 10 numere naturale consecutive mai mari decât 1, există unul care să fie multiplu al unui număr prim mai mare decât 10.

Manuela Prajea

Soluţie: Printre cele 10 numere vor fi 5 numere impare. Cel mult două dintre acestea sunt divizibile cu 3, exact unul este divizibil cu 5 şi cel mult unul este divizibil cu 7. Rămâne cel puţin un număr impar care nu este divizibil nici cu 2, nici cu 3, nici cu 5 şi nici cu 7, deci este multiplu al unui număr prim mai mare decât 10.

Într-adevăr, numerele impare divizibile cu 3 sunt cele de forma $6k+3$ iar distanţa dintre două asemenea numere este 6, deci printre 10 numere naturale consecutive nu putem avea 3 asemenea numere căci distanţa dintre cel mai mic şi cel mai mare ar fi 12. Exact unul din aceste numere se termină cu cifra 5 adică este multiplu impar al lui 5. Numerele impare divizibile cu 7 sunt cele de forma $14k+7$; distanţa dintre două numere de această formă fiind 14, printre 10 numere naturale consecutive putem avea cel mult un număr impar divizibil cu 7.

Problema 3. Piaştrii sunt monede care au proprietatea că fiecare cântăreşte exact cât valoarea ei. Avem cinci monede cu valorile: 1, 2, 3, 5 şi 10 piaştri. Una dintre aceste monede este falsă, adică greutatea ei nu coincide cu valoarea ei. Cum se poate determina moneda falsă folosind numai o balanţă?

* * *

Soluţie: Comparăm mai întâi 2,3,5 cu 10. Dacă balanţa stă în echilibru atunci 1 este moneda falsă. Dacă balanţa se înclină, comparăm 2,3 cu 5. Dacă balanţa stă în echilibru atunci 10 este moneda falsă.
I. Dacă balanţa se înclină spre 5 atunci fie 5 este falsă (mai grea decât trebuie), fie una din monedele 2,3 este prea uşoară.
Comparăm 1,2 cu 3. Dacă balanţa stă în echilibru moneda falsă este 5. Dacă se înclină spre 1,2 atunci 3 este moneda falsă (este prea uşoară), iar dacă balanţa se înclină spre 3 atunci 2 este moneda falsă (prea uşoară).
II. Dacă balanţa se înclină spre 2,3 atunci fie 5 este falsă (mai uşoară decât trebuie), fie una din monedele 2,3 este prea grea.
Comparăm 1,2 cu 3. Dacă balanţa stă în echilibru moneda falsă este 5. Dacă se înclină spre 1,2 atunci 2 este moneda falsă (este prea grea), iar dacă balanţa se înclină spre 3 atunci 3 este moneda falsă (prea grea).

Problema 4. Spunem că un număr este *five-summable* dacă el se poate scrie ca suma a cinci numere de două cifre astfel încât oricare două cifre ale acestor numere să fie distincte.

a) Arătaţi că orice număr *five-summable* este divizibil cu 9.
b) Câte numere *five-summable* există?
c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor *five-summable* ecuaţia $x + y = z$.

Manuela Prajea

Soluţie:
Un număr *five-summable* este de forma $x = \overline{ab}+\overline{cd}+\overline{ef}+\overline{gh}+\overline{i0}$, unde a, b, c, d, e, f, g, h, i sunt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, nu neapărat în această ordine.
a) Avem $x = 10(a+c+e+g+i)+(b+d+f+h)$ şi, cum $a+b+c+d+e+f+g+h+i = 1+2+3+4+5+6+7+8+9$, rezultă $x = 10(a+c+e+g+i)+45-(a+c+e+g+i) = 9(a+c+e+g+i)+45 = 9(n+5)$ unde $n = a+c+e+g+i$. Aşadar, orice număr *five-summable* este divizibil cu 9.
b) Valorile posibile ale numărului n sunt numerele naturale de la 15 la 35:
$15 = 1+2+3+4+5$, $16 = 1+2+3+4+6$, $17 = 1+2+3+4+7$, $18 = 1+2+3+4+8$, $19 = 1+2+3+4+9$, $20 = 1+2+3+5+9$, $21 = 1+2+3+6+9$, $22 = 1+2+3+7+9$, $23 = 1+2+3+8+9$, $24 = 1+2+4+8+9$, $25 = 1+2+5+8+9$, $26 = 1+2+6+8+9$, $27 = 1+2+7+8+9$, $28 = 1+3+7+8+9$, $29 = 1+4+7+8+9$, $30 = 1+5+7+8+9$, $31 = 1+6+7+8+9$, $32 = 2+6+7+8+9$, $33 = 3+6+7+8+9$, $34 = 4+6+7+8+9$. $35 = 5+6+7+8+9$. (Este evident că nu se pot obţine valori mai mici decât

15 sau mai mari decât 35.) Aşadar sunt 21 de numere *five-summable*: $9(n+5)$ cu $n \in \{15, 16, \ldots, 35\}$, adică 180, 189, 198, ..., 360.
c) Dacă x, y, z sunt *five-summable* şi verifică $x+y=z$, cum $180 \leq x, y, z \leq 360$, singura soluţie este $x=y=180$, $z=360$.