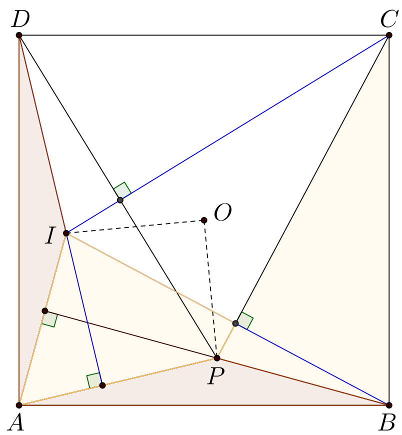
Problema săptămânii 72
Fie P un punct în interiorul unui pătrat $ABCD$. Demonstraţi că perpendicularele din A, B, C, D pe dreptele BP, CP, DP, respectiv AP sunt concurente.

M. Bezborodnikov, Kvant, 1995

Soluţie: (*Vlad Vergelea, Radu-Andrei Lecoiu, David Andrei Anghel*)
Fie I intersecţia perpendicularei din A pe BP cu perpendiculara din B pe CP. Atunci $m(\sphericalangle PBC) = 90^\circ - m(\sphericalangle ABP) = m(\sphericalangle IAB)$ şi $m(\sphericalangle IBA) = 90^\circ - m(\sphericalangle IBC) = m(\sphericalangle PCB)$, deci $\Delta\, IAB \equiv \Delta\, PBC$ (ULU). De aici rezultă că $AI = PB$ şi $\sphericalangle DAI \equiv \sphericalangle ABP$, deci $\Delta\, AID \equiv \Delta\, BPA$ (LUL). Dar, cum $m(\widehat{AI, BP}) = 90^\circ = m(\widehat{AB, DA})$, rezultă că $m(\widehat{DI, AP}) = 90^\circ$. Analog se arată că $m(\widehat{CI, DP}) = 90^\circ$ ceea ce arată că cele patru perpendiculare sunt concurente în I.



Observaţii:
1. Triunghiul IAB se obţine din triunghiul PBC printr-o rotaţie de 90° (în sensul acelor de ceasornic) în jurul centrului, O, al pătratului. Aceeaşi rotaţie transformă triunghiul BPA în triunghiul AID. Din cele de mai sus rezultă că triunghiul OIP este dreptunghic isoscel.
2. (*Vlad Vergelea*) Afirmaţia rămâne valabilă şi dacă punctul P se află în exteriorul pătratului.

Problema se pretează foarte bine şi la o abordare cu geometrie analitică. Am primit două astfel de soluţii de la *Lucia Rîşnoveanu* şi de la *Vlad Vergelea*.
Pe scurt: dacă $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,a)$, $D(0,a)$, $P(b,c)$, atunci ecuaţiile dreptelor AP, BP, CP, DP se scriu uşor. Apoi condiţia ca două drepte să fie perpendiculare se scrie şi ea uşor (produsul pantelor trebuie să fie -1). Se constată uşor scriind ecuaţiile celor patru perpendiculare că ele trec prin punctul $I(c, a-b)$.
O altă cale de a impune condiţia de perpendicularitate: $AI \perp PB \Leftrightarrow AP^2 + IB^2 =$

$AB^2 + PI^2$ şi analoagele.

Observaţii: (*Petru Braica*):
1. Dacă înlocuim pătratul cu un poligon regulat cu n laturi şi în loc de perpendiculare luăm drepte care fac unghiuri egale cu cele ale poligonului regulat, concurenţa se păstrează.
2. Dacă se iau perpendicularele şi în celălalt sens se obţine încă un punct de concurenţă care, împreună cu primul punct de concurenţă şi cu punctul interior formează un triunghi dreptunghic isoscel în care mijlocul ipotenuzei este centrul pătratului. Pentru o posibilă demonstraţie: rotaţii.

Problem of the week no. 72
Let P be a point in the interior of the square $ABCD$. Prove that the perpendicular lines drawn from A, B, C, and D to the lines BP, CP, DP, and AP, respectively are concurrent.

M. Bezborodnikov, Kvant, 1995

Solution: (*Vlad Vergelea, Radu-Andrei Lecoiu, David Andrei Anghel*)
Let I be the intersection point of the perpendicular from A to BP with the perpendicular from B to CP. Then $\sphericalangle PBC = 90° - \sphericalangle ABP = \sphericalangle IAB$ and $\sphericalangle IBA = 90° - \sphericalangle IBC = \sphericalangle PCB$, hence $\Delta\, IAB \equiv \Delta\, PBC$ (ASA). From here it follows that $AI = PB$ and $\sphericalangle DAI = \sphericalangle ABP$, hence $\Delta\, AID \equiv \Delta\, BPA$ (SAS). But, as $\widehat{AI, BP} = 90° = \widehat{AB, DA}$, it follows that $\widehat{DI, AP} = 90°$. Similarly one can easily see that $\widehat{CI, DP} = 90°$ which shows that the four perpendicular lines meet at I.