Problema săptămânii 71
Determinaţi soluţiile întregi ale ecuaţiei $(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y$.

Olimpiadă Rusia, 1997

Soluţie:
Dacă (x, y) este o soluţie a ecuaţiei, atunci $y \geq 0$ şi, cum nu avem soluţie cu $x = y$, trebuie să avem avem fie $|x| \geq y + 1$, fie $|x| \leq y - 1$. Atunci $(x^2 - y^2)^2 \geq (2y - 1)^2$, adică $1 + 16y \geq (2y - 1)^2$, sau $4y^2 \leq 20y$, adică $y \leq 5$. Verificând pe rând valorile lui $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ obţinem soluţiile $(\pm 1, 0)$, $(\pm 4, 3)$ şi $(\pm 4, 5)$.

O analiză interesantă a diverselor moduri de a aborda această problemă găsiţi aici.
Îi mulţumesc pe această cale lui *David Andrei Anghel* pentru a-mi fi semnalat link-ul.

Problem of the week no. 71
Find the integer solutions of the equation $(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y$.

Russian Olympiad, 1997

Solution:
If (x, y) is a solution, then $y \geq 0$ and, as there are no solutions with $x = y$, we need to have either $|x| \geq y + 1$, or $|x| \leq y - 1$. It follows that $(x^2 - y^2)^2 \geq (2y - 1)^2$, i.e. $1 + 16y \geq (2y - 1)^2$, which means that $4y^2 \leq 20y$, i.e. $y \leq 5$. Checking $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ we obtain the solutions: $(\pm 1, 0)$, $(\pm 4, 3)$ and $(\pm 4, 5)$.

A very interesting discussion of the possible methods of approaching this problem can be found here.
I hereby thank *David Andrei Anghel* for pointing this site out.