Problema săptămânii 70
Fie $P_1P_2\dots P_n$ un poligon regulat cu n laturi. O broască aflată în vârful P_k $(1 \le k \le n)$ poate sări într-unul din vârfurile P_{k+2} şi P_{k+3}, indicii fiind luaţi modulo n. Broasca face sărituri astfel încât să viziteze fiecare vârf al poligonului şi să se întoarcă în vârful din care a pornit. Care este numărul minim de sărituri pe care trebuie să le facă broasca?

Olimpiadă Austria, 2016, prelucrare [1]

Soluţie:
Este evident că sunt necesare cel puţin n sărituri.
Pentru n impar, dacă broasca face n salturi de lungime 2, ea se va întoarce în punctul de pornire vizitând pe parcurs toate vârfurile, deci în acest caz minimul căutat este n.
Similar, dacă n nu este divizibil cu 3, atunci n salturi de lungime 3 vor duce broasca prin toate vârfurile, terminând cu cel de pornire. Din nou, minimul căutat este n.
Dacă $6 \mid n$ este clar că varianta cu n salturi de aceeaşi lungime nu mai convine. Aşadar broasca trebuie să facă salturi de ambele lungimi. Dacă ea ar putea vizita din n salturi toate vârfurile, atunci distanţa totală parcursă de broscă ar fi cuprinsă între $2n$ şi $3n$, deci nu poate fi divizibilă cu n. Prin urmare broasca nu poate, în acest caz, parcurge toate vârfurile din n salturi. Însă ea poate face acest lucru din $n+1$ salturi: dacă $n = 6j$, broasca poate sări în felul următor:
$P_0 \mapsto P_3 \mapsto P_6 \mapsto \dots \mapsto P_{6j-3} \mapsto P_{6j-1} \mapsto P_2 \mapsto P_5 \mapsto \dots \mapsto P_{6j-4} \mapsto P_{6j-2} \mapsto P_1 \mapsto P_4 \mapsto \dots \mapsto P_{6j-5} \mapsto P_{6j-3} \mapsto P_0$.
Astfel, ea vizitează fiecare vârf (vârful P_{6j-3} chiar de două ori). Aşadar, dacă $6 \mid n$, atunci minimul căutat este $n+1$.

Remarcă: La Olimpiadele din Austria şi Suedia s-a cerut numai analizarea cazului $n = 2016$. Această problemă mi-a sugerat problema 3 de la Stelele Matematicii de anul acesta.

Problem of the week no. 70
Let $P_1P_2\dots P_n$ be a regular n-gon. A frog can jump from a vertex P_k $(1 \le k \le n)$ to one of the vertices P_{k+2} and P_{k+3}, the indices being taken modulo n. The frog must jump such that it visits each vertex, then it returns to its starting vertex. What is the smallest possible number of jumps?

adapted from an Austrian Olympiad problem

Solution:
It is obvious that n jumps are necessary.
If n is odd, the frog can make n jumps of length 2, visiting each vertex once and returning to its starting vertex. Therefore, in this case, the required minimum is n.

[1] dată şi la *Olimpiadă Suedia*, 2017

Similarly, if n is not a multiple of 3, then n jumps of length 3 will lead the frog through all the vertices, finishing where it has started so, again, the required minimum is n.

If $6 \mid n$, it is clear that n jumps of equal length do not make the frog visit all the vertices. Hence, the frog must make jumps of both possible lengths. If it could visit all the vertices in n jumps, their total length would be between $2n$ and $3n$. Not being a multiple of n means the frog cannot return to its starting vertex after n jumps. But it can return there in $n + 1$ jumps, which makes $n + 1$ the required minimum in this case. Here is a way the frog could jump:

$P_0 \mapsto P_3 \mapsto P_6 \mapsto \ldots \mapsto P_{6j-3} \mapsto P_{6j-1} \mapsto P_2 \mapsto P_5 \mapsto \ldots \mapsto P_{6j-4} \mapsto P_{6j-2} \mapsto P_1 \mapsto P_4 \mapsto \ldots \mapsto P_{6j-5} \mapsto P_{6j-3} \mapsto P_0$.

In conclusion, the answer is: n if n is not a multiple of 6 and $n + 1$ otherwise.