Problema săptămânii 68

Jocul *Clopper* se joacă pe o fâşie dreptunghiulară formată din $2k$ pătrăţele. La început, în fiecare pătrăţel stă câte o piesă, piesele celor doi jucători fiind dispuse alternativ. La fiecare mutare jucătorul împinge o piesă a sa într-un pătrăţel vecin în care se află o piesă de-a adversarului şi îndepărtează piesa adversarului de pe tablă. Cei doi jucători mută alternativ, iar jucătorul care nu mai poate muta pierde.
Demonstraţi că dacă pentru o anumită valoare k jucătorul care nu începe jocul are strategie câştigătoare, atunci pentru $k+1$ şi $k+2$ jucătorul care face prima mutare are strategie câştigătoare.

Olimpiadă Estonia, 2003

Soluţie:

Dacă lungimea fâşiei este $2(k+1)$, atunci, la prima sa mutare, primul jucător ia piesa adversarului său care stă la capătul fâşiei. Această mutare împarte piesele în două grupe, una de lungime $2k$ şi o alta de lungime 1 (piesa mutată). Deoarece piesa mutată a rămas izolată, ea nu mai poate fi mutată, deci jocul va continua pe bucata de lungime $2k$, unde strategie câştigătoare are cel care nu urmează la mutare, adică primul jucător.
Dacă lungimea fâşiei este $2(k+2)$, atunci, la prima sa mutare, primul jucător ia piesa adversarului său care stă pe cel de-al treilea pătrat de la capăt, el mutând piesa de pe locul 4 de la capăt. Această mutare împarte piesele în două grupe, una de lungime $2k$ şi o alta de lungime 3. Deoarece piesa mutată a rămas izolată, ea nu mai poate fi mutată, deci jocul va continua pe bucata de lungime $2k$, unde strategie câştigătoare are cel care nu urmează la mutare, adică primul jucător. Dacă al doilea jucător face o mutare în grupul de 3 piese, atunci şi primul jucător mută în acel grup (moment în care nu se mai pot face mutări în acel grup). În rest, jucătorul care a început poate urma strategia câştigătoare pe tabla de lungime $2k$ a jucătorului care nu începe jocul.

Comentariu: Jocul din problemă se numeşte *Clopper*. El se poate juca şi pe o tablă $m \times n$. Nici în cazul $1 \times 2k$ nu s-a demonstrat care jucător are strategie de câştig. Este uşor de văzut că pentru $k = 1$ şi $k = 2$ primul jucător câştigă, în vreme ce pentru $k = 3$ cel de-al doilea jucător câştigă. Din problema noastră rezultă că pentru $k = 4$ şi $k = 5$ primul jucător este cel care are strategie câştigătoare.
Se crede că pentru orice $k > 3$ primul jucător este cel care are strategie de câştig, iar acest lucru a a fost verificat pentru $3 < k \leq 19$. (vezi aici)

Problem of the week no. 68

The game *Clobber* is played by two on a strip of $2k$ squares. At the beginning there is a piece on each square, the pieces of both players stand alternatingly. At each move the player shifts one of his pieces to the neighbouring square that holds a piece of his opponent and removes his opponent's piece from the table. The moves are made in turn, the player whose opponent cannot move anymore is the winner.

Prove that if for some k the player who does not start the game has the winning strategy, then for $k+1$ and $k+2$ the player who makes the first move has the winning strategy.

2017 Estonian Olympiad, 2003

Solution: If the length of the strip is $2(k+1)$, then at his first move, the first player beats his opponent's piece that stands at the end of the strip. This divides the pieces into two sections: one of length $2k$ and the other of length 1. Since the second section cannot change, the situation is equivalent to playing the game on a strip of length $2k$ where the second player makes the first move. So the first player can follow the winning strategy. If the length of the strip is $2(k+2)$, then at his first move, the first player beats his opponent's piece that stands on the third square from the end with his piece that stands on the fourth square from the end.After that the board again contains two sections: one of length $2k$ and the other of length 3. If the second player makes a move in the first section, the first player responds according to the winning strategy. If the second player makes a move in the second section, the first player also makes his move in the second section which thereafter has only one piece left.

Comment: It is easy to check that for $k=1$ and $k=2$ the first player wins, while for $k=3$ the second player wins. From the problem above, it follows that for $k=4$ and $k=5$ the first player has a winning strategy.
It has been conjectured that for $k>3$ it is the first player that has a winning strategy. This conjecture has been verified by computer up to $k=19$. (see here)